Ecole Polytechnique de Louvain

Conception d'un outil de modélisation de stimulation électrique d'une fibre nerveuse

Promoteurs:
Dr. Jean Delbeke
Prof. Philippe Lefèvre
Lecteurs:
Dr. Mehdy Oozeer
Dr. Emilie Marchandise

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade d'ingénieur civil biomédical par **Thibault Giard**

Louvain-la-neuve

5 janvier 2010

Je remercie mon promoteur, le Dr. J. Delbeke, pour m'avoir orienté et conseillé tout au long de ce travail. Il m'a été d'une grande aide autant au niveau de la théorie biologique qu'au niveau de la modélisation.

Je remercie mon second promoteur, le Prof. P. Lefèvre, pour m'avoir encadré et permis d'avancer efficacement et de manière structurée dans la réalisation de ce mémoire.

Je remercie le Dr M. Oozeer qui m'a éclairé sur les travaux déjà réalisés à ce sujet. Il m'a permis de nombreuses fois de continuer à avancer en m'expliquant les différents concepts abordés et leurs implémentations.

Je remercie Jorge Marin Millan pour m'avoir aidé à la réalisation de l'interface graphique. Les diverses entrevues que nous avons eu m'ont permis de comprendre les besoins et de repérer les avantages et les inconvénients de l'interface graphique à chaque étape de sa réalisation.

Je remercie le Prof. V. Legat qui m'a donné plus d'explications sur la méthode des éléments finis et qui m'a permis d'orienter correctement mon étude.

Je remercie tout particulièrement Joachim Giard qui m'a soutenu tout au long de la réalisation de ce travail en m'aidant à comprendre les différents sujets abordés et les programmes utilisés et qui a été présent à chaque difficulté rencontrée. Je le remercie également énormément pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de mes études.

Je remercie ma maman pour les longues heures passées à relire ce travail et pour son soutien et sa présence lors de sa rédaction. Et je remercie finalement mon papa pour sa collaboration à la relecture et ses encouragements.

Table des matières

1 Contexte et besoins **4**
- 1.1 Besoins . . . 4
- 1.2 Contribution . . . 4
- 1.3 Plan . . . 6

2 Introduction biologique **7**
- 2.1 Le neurone . . . 7
- 2.2 Les circuits neuraux . . . 8
- 2.3 La propagation de l'information dans une fibre nerveuse . . . 10
  - 2.3.1 Le potentiel de repos . . . 13
  - 2.3.2 Le potentiel d'action . . . 14
  - 2.3.3 Illustration chiffrée . . . 14
- 2.4 La perméabilité de la membrane dépendante du voltage . . . 16
- 2.5 Principe de la stimulation électrique nerveuse fonctionnelle . . . 18

3 Distribution des potentiels dans la fibre nerveuse **21**
- 3.1 Méthode des éléments finis . . . 22
  - 3.1.1 L'équation de Poisson . . . 22
  - 3.1.2 La méthode en théorie . . . 23
  - 3.1.3 Une méthode variationnelle . . . 24
  - 3.1.4 Le maillage . . . 25
- 3.2 La méthode par Fourier . . . 27
  - 3.2.1 Théorie . . . 27
  - 3.2.2 Algorithme . . . 34
- 3.3 La méthode par extrusion . . . 34
  - 3.3.1 Théorie . . . 35
  - 3.3.2 Fonctionnement du programme . . . 41
- 3.4 Justification du choix de la méthode . . . 50
- 3.5 Exemple de résultat . . . 52

4 Design de l'interface graphique **56**
- 4.1 Démarche centrée utilisateur . . . 56

5 Conclusion et perspectives **60**

A Mode d'emploi **64**

B Fichier d'entrées de l'exemple de résultat donné à la section 3.5 **71**
B.1 default_geom 71
B.2 inputMesh2D.txt 74
B.3 inputExtrusion.txt 75
B.4 inputFEM.txt 76

C GUI avec solution **77**

Chapitre 1

Contexte et besoins

De nos jours, la stimulation élctrique nerveuse fonctionnelle (FES) est une technique extrêmement utilisée. Elle permet d'envoyer des informations à différentes parties du corps, par exemple dans le cas où le système nerveux a été endommagé et n'est plus capable de le faire lui-même. Cette information est envoyée via les fibres nerveuses sous forme de signal électrique.

1.1 Besoins

Il existe déjà un certain nombre d'outils de modélisation tridimensionnelle de la stimulation électrique nerveuse ([1],[2] et deux que nous étudions dans ce travail [3] et [4]). Malheureusement, ces outils sont peu modulables, peu portables, lourds à l'exécution et surtout très difficilement utilisables pour des personnes qui ne possèdent pas les connaissances appropriées. Les connaissances requises pour utiliser ce genre de modèles vont de la maîtrise de la méthode des éléments finis et de Matlab jusqu'à celle de langages de programmation tels que C ou C++. Or, une partie des personnes intéressées par ce genre d'outils ne possèdent pas ces connaissances. Il serait donc intéressant de leur fournir un outil qui n'exigerait pas une maîtrise de ces différents domaines. Il serait également intéressant que cet outil puisse évoluer et être amélioré facilement. Nous distinguons deux groupes de personnes intéressées par ce projet :

- Celles qui veulent faire évoluer et améliorer l'outil. C'est principalement à ce groupe qu'est destiné ce rapport dans le but de fournir toutes les informations nécessaires à la compréhension du programme et à sa modification.
- Celles qui veulent utiliser l'outil (par exemple pour des recherches en neurologie). Dans ce travail, une personne appartenant à ce groupe est nommée : "utilisateur". C'est principalement à ce groupe qu'est destinée l'interface graphique (voir section 4) et le mode d'emploi en annexe.

1.2 Contribution

L'objectif de ce projet est donc de fournir un outil complet de modélisation de stimulation électrique artificielle nerveuse. La conception de cet outil comprend les étapes suivantes :

– Le design d'une interface graphique ergonomique et facile d'utilisation suivant une méthode inspirée de la *méthode centrée utilisateur*[5].
– Le calcul de distribution des potentiels le long de la fibre lorsqu'un courant traverse des électrodes de stimulation.
– L'implémentation du modèle de membrane de la fibre nerveuse.

Ce mémoire est limité à l'interface graphique et au calcul de la distribution des potentiels.

Les deux méthodes de calcul étudiées sont les suivantes :

– celle proposée dans le travail de S. Parrini[3], que l'on appellera **méthode par Fourier**,
– celle proposée dans le mémoire de A. de Potter d'Indoye[6] et la thèse de M. Oozeer[4], que l'on appellera **méthode par extrusion**.

Ce texte décrit la démarche suivie pour la réalisation de ces deux parties. Il en explique autant les aspects théoriques que pratiques, pour permettre à d'autres personnes de pouvoir modifier ce qui a déjà été réalisé et d'avancer efficacement dans le projet global.

Un outil modulable

La stimulation électrique fonctionnelle étant un domaine en pleine croissance, il est important que l'outil proposé puisse subir des améliorations de manière régulière.

Par exemple, la méthode par extrusion est constituée de trois parties : la conception du maillage 2D, l'extrusion (pour obtenir un maillage 3D) et enfin la résolution de l'équation de Poisson par la méthode des éléments finis. Chacune de ces parties est donc un module aux entrées et sorties bien définies qui peut être remplacé indépendamment des deux autres. De la même manière, le calcul de distribution peut être remplacé entièrement tout en conservant l'interface graphique. Il est donc essentiel de spécifier avec précision les entrées et sorties de chaque module de sorte qu'il soit remplaçable aisément par n'importe qui.

Sur la figure 1.1 sont représentés les différents blocs de l'application finale avec leurs entrées et leurs sorties. Les parties qui sont réalisées et étudiées en profondeur dans ce mémoire sont en pointillé rouge.

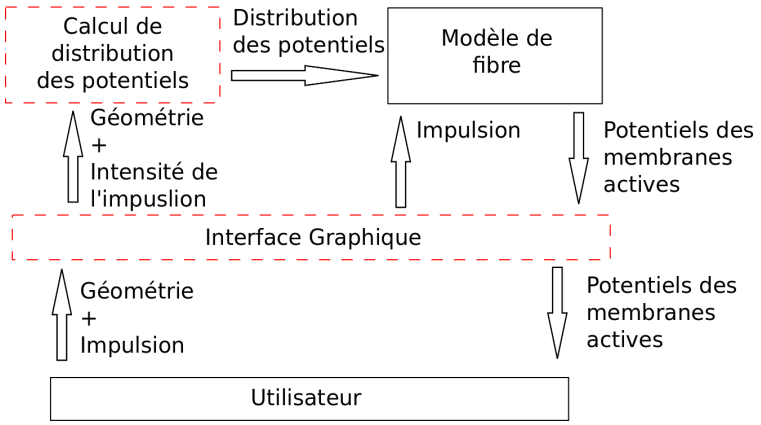


FIG. 1.1 – Schéma des différents modules de l'outil.

1. Calcul de la distribution des potentiels le long de la fibre :

   Entrées Géométrie du système et intensité du courant unitaire

   Sortie Distribution des potentiels le long de la fibre des éléments finis

2. Calcul des potentiels des membranes actives (via un modèele de fibre) :

   Entrées Distribution des potentiels le long de la fibre et impulsion électrique

   Sortie Potentiels des membranes actives

3. Interface graphique :

   Entrées Géométrie du système et impulsion électrique

   Sortie Potentiels des membranes actives

Chacun de ces trois blocs sera donc remplaçable à l'aide d'interfaces bien définies.

1.3 Plan

Tout d'abord, le cadre biologique est posé (chapitre 2), suivi d'une explication sur le calcul de la distribution des potentiels dans un volume (chapitre 3). Cette deuxième partie est la plus importante et débute par une introduction théorique sur la méthode des éléments finis (section 3.1). Elle est suivie par la description de la méthode par Fourier (section 3.2) et de la méthode par extrusion (section 3.3). Ensuite, le choix de l'utilisation de cette dernière est justifié (section 3.4) et un exemple de résultat est donné (section 3.5). Dans le chapitre 4, la méthode de design de l'interface graphique de l'outil est abordée. Pour conclure, les perspectives, les améliorations à apporter autant à l'outil et à son implémentation qu'au modèle en lui-même sont décrites dans le chapitre 5. En annexe, se trouvent les fichiers d'entrées et de sorties du résultat présenté dans la section 3.5 et un mode d'emploi.

Chapitre 2

Introduction biologique

Ce chapitre est un résumé du premier chapitre du livre *Neurosciences* de Purves, D. [7].

Le système nerveux, comme tous les autres systèmes de l'organisme, est constitué de cellules dont font partie les neurones. Ces derniers s'organisent en réseaux pour former des circuits neuraux qui ont pour but de faire communiquer n'importe quelle partie du corps avec une autre. Il existe deux circuits neuraux principaux, le système nerveux central et le système nerveux périphérique. Bien que les neurones ne soient pas de bons conducteurs, l'information au sein du système nerveux est transmise par des signaux électriques grâce à des phénomènes chimiques et à la modification de la perméabilité de la membrane. Dans cette partie, nous détaillons ces différents mécanismes de manière à bien maîtriser le contexte biologique avant de décrire le modèle.

2.1 Le neurone

Bien que les neurones possèdent des formes extraordinairement complexes (voir fig.2.1) et que leurs ramifications tendent à masquer leur ressemblance avec les cellules des autres tissus, ils possèdent bel et bien les mêmes organites que ces dernières. La figure 2.2 nous montre le noyau, l'appareil de Golgi, les ribosomes, les mitochondries et le réticulum endoplasmique.

Les cellules nerveuses sont spécialisées dans la transmission de l'information sous forme de signaux électriques à longue distance et possèdent donc une anatomie et des caractéristiques particulières. La synapse est une zone de contact fonctionnelle qui s'établit entre un neurone et une autre cellule (neurone, récepteur sensoriel, cellule musculaire,...). Elle permet la communication interneuronale. Il existe des synapses chimiques ou des synapses électriques. Les premières utilisent des neurotransmetteurs et les secondes transmettent le signal via des jonctions communicantes. La figure 2.3 est un schéma d'une cellule nerveuse et de ses divers constituants.

Le corps cellulaire peut également être appelé péricaryon (du grec "autour du noyau") ou soma. C'est dans cette zone que se trouvent les fonctions vitales du neurone :

- L'expression génétique
- La production d'énergie sous forme d'ATP

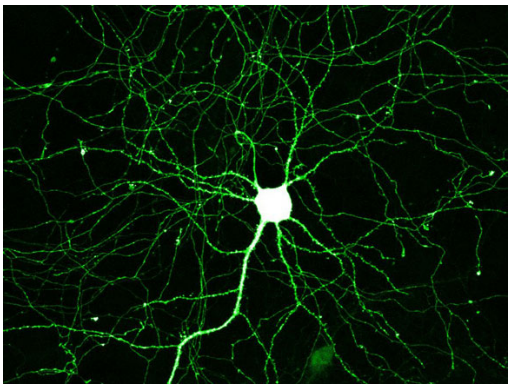


FIG. 2.1 – Les neurones peuvent avoir des formes extraordinairement complexes.
© 2007, Paul De Koninck

– La synthétisation des éléments nécessaires au renouvellement cellulaire (région trophique)

Il permet également la réception des stimuli car il possède des synapses.

L'axone est le segment de la cellule nerveuse spécialisé dans la conduction du signal jusqu'au site suivant d'interaction synaptique. C'est un prolongement long, mince et cylindrique du corps cellulaire qui peut s'étendre d'une centaine de microns jusqu'à plus d'un mètre. Pour transmettre l'information sur de si longues distances, l'axone utilise le mécanisme de potentiel d'action (voir section 2.3). Il s'agit d'une onde électrique qui s'autorégénère et se propage le long de l'axone depuis son lieu d'origine (le cône axonique, illustré sur la fig.2.2, ou l'électrode en cas de stimulation artificielle) jusqu'à son extrémité où se font les contacts synaptiques.

Les dendrites sont la cible principale des afférences synaptiques issues d'autres neurones. Ils se distinguent par une abondance de ribosomes ainsi que par des protéines spécifiques du cytosquelette reflétant leur rôle dans la réception et l'intégration des informations venues d'autres neurones. Elles se situent à l'extrémité opposée à l'axone du neurone.

2.2 Les circuits neuraux

Les circuits neuraux sont des ensembles de neurones. Ces derniers ne fonctionnent jamais seuls et s'organisent en ensembles adoptant des dispositions très variées selon les fonctions qu'ils sous-tendent. Les circuits assurant des fonctions similaires constituent des systèmes neuraux intervenant dans des domaines comportementaux relativement vastes. Une première façon de diviser les systèmes neuraux est de les distinguer par rapport à leur fonction. Le système nerveux se sépare en trois catégories de sous-systèmes :

Les systèmes sensoriels captent et traitent les informations de l'environnement.

Les systèmes moteurs permettent de répondre aux informations par des mouvements ou autres comportements.

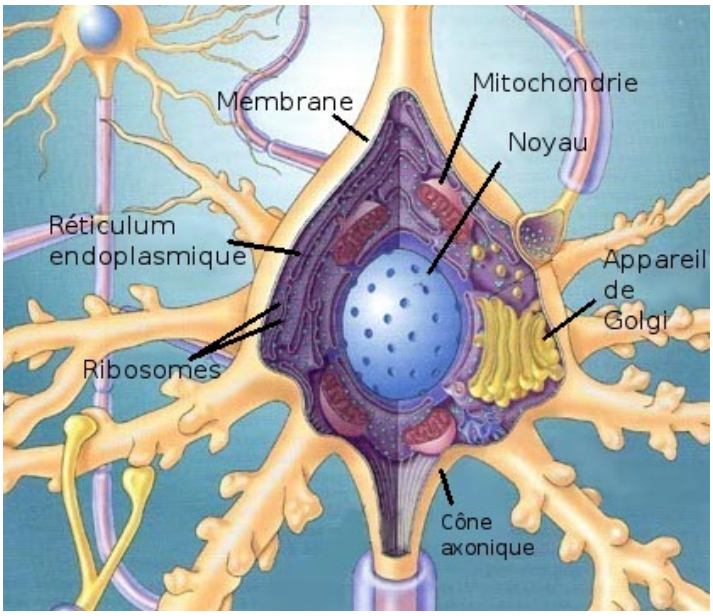


FIG. 2.2 – Les neurones possèdent les mêmes organites que les autres cellules. (image adaptée du livre Neuroscience [7])

Les systèmes associatifs se situent entre les deux autres catégories et prennent en charge les fonctions cérébrales les plus complexes et les moins bien définies.

Une deuxième manière de distinguer les différents systèmes est d'effectuer une division anatomique.

Le système nerveux est constitué de deux composantes anatomiques (voir fig.2.4) :

Le système nerveux central (SNC) comprenant l'encéphale (cerveau, cervelet et tronc cérébral) et la moelle épinière.

Le système nerveux périphérique (SNP) comprenant les neurones sensitifs (connectant les récepteurs sensoriels aux circuits de traitement du SNC), le contingent moteur somatique (axones moteurs reliant l'encéphale et la moelle aux muscles) et le contingent moteur végétatif (neurones et axones innervant les muscles lisses, le muscle cardiaque et les glandes).

Il est également important de faire une distinction entre les différents circuits en fonction de leur caractère afférent (ils transportent l'information vers le SNC) ou leur caractère efférent (ils véhiculent l'information émanant du SNC). Il existe également des interneurones qui n'interviennent que de manière locale dans les différents circuits neuraux. La figure 2.5 est un résumé du fonctionnement et des différents circuits du système nerveux.

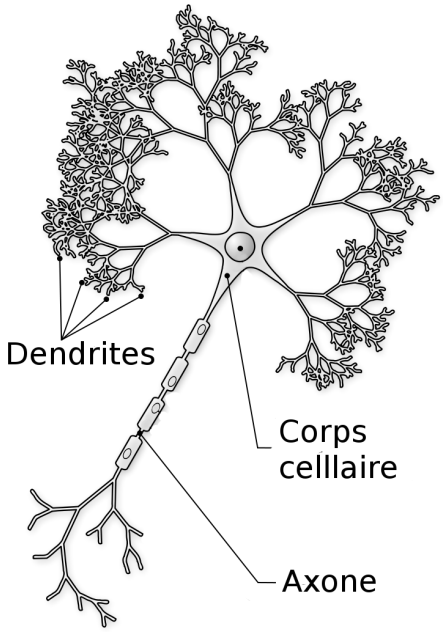


FIG. 2.3 – Le neurone est composé de trois parties principales, le corps cellulaire, l'axone et les dendrites. (image réalisée par Rougier N.)

2.3 La propagation de l'information dans une fibre nerveuse

Comme nous l'avons dit plus haut, les neurones ne sont pas intrinsèquement de bons conducteurs électriques. Cependant, ils utilisent un mécanisme d'émission de signaux électriques perfectionné pour transmettre l'information. Ce mécanisme, appelé **potentiel d'action**, est fondé sur les flux d'ions au travers de la membrane plasmique. Il rend pendant un moment le potentiel transmembranaire, c'est-à-dire le potentiel intra-cellulaire par rapport au milieu extérieur, positif alors que d'ordinaire il est négatif.

Lorsque l'on utilise une microélectrode intracellulaire pour enregistrer le potentiel existant entre les deux côtés de la membrane plasmique du neurone, on peut observer quatre types de potentiels caractéristiques.

- Le premier est un potentiel négatif enregistré au repos. Cela signifie que le neurone a les moyens de créer une différence de potentiel entre les deux faces de sa membrane. Cette différence de potentiel est appelée **potentiel de repos de la membrane**. Typiquement, il a une valeur comprise entre -40 et $-90mV$.
- Le second regroupe les potentiels enregistrés suite à un stimulus externe tel que la lumière, la chaleur, le bruit. Ils sont appelés **potentiels de récepteur**.
- Le troisième s'observe au niveau des contacts synaptiques lors de la communication entre neurones, ce sont les **potentiels synaptiques**. Ils servent

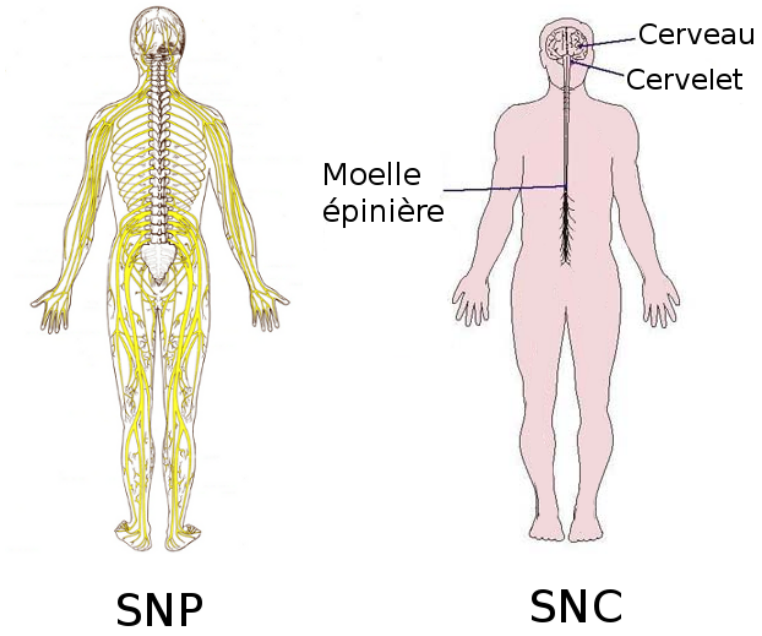


FIG. 2.4 – Le système nerveux peut être divisé en deux sous-systèmes, le système nerveux périphérique (à gauche) et le système nerveux central (à droite). (image adapdtée d'une image réalisée par Stéphane Schmitt)

au transfert de l'information d'un neurone à un autre. C'est par l'intermédiaire de ces potentiels que le SNC et le SNP communiquent.

– Le dernier et le plus important est le **potentiel d'action**. C'est un signal électrique produit par le système d'amplifaction du neurone. Ce type de potentiel est déclenché lorsqu'un courant électrique passe à travers la membrane. Dans les conditions normales, ce courant provient des potentiels de récepteur ou des potentiels synaptiques mais il peut également être induit par une microélectrode, par exemple dans le cas d'une FES (stimulation électrique foncitonnelle). Il est important de noter que si le courant tend à rendre le potentiel de membrane plus négatif (hyperpolarisation) la membrane a une réponse passive. Mais dans le cas contraire (dépolarisation) et seulement si le potentiel de membrane atteint le potentiel-seuil, le neurone déclenche un potentiel d'action (voir fig.2.6). Il se traduit par un changement rapide ($1ms$) du potentiel transmembranaire du négatif vers le positif. C'est un phénomène de *tout ou rien*, cela signifie que l'amplitude du potentiel d'action est indépendante de l'intensité du courant qui le déclenche. L'intensité ou la durée du courant va donc déterminer si un ou plusieurs potentiels d'action sont déclenchés et à quelle vitesse mais pas son amplitude.

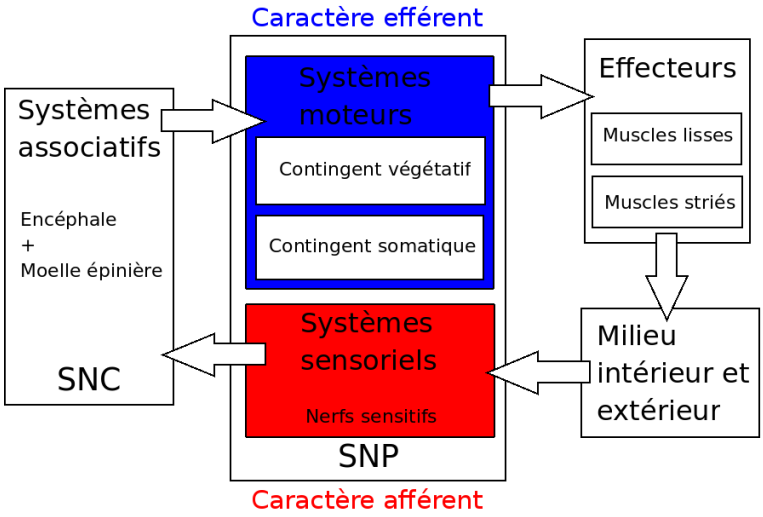


FIG. 2.5 – Le système nerveux est constitué de différents circuits, afférents ou efférents regroupés en systèmes fonctionnels ou anatomiques.

Deux sortes de protéines présentes dans la membrane cellulaire ont pour rôle de réguler la perméabilité de la membrane, donc la concentration ionique des deux côtés et finalement le potentiel transmembranaire.

Les transporteurs actifs se chargent de faire passer les ions d'un côté à l'autre à l'encontre du gradient de concentration et modifient donc ce dernier en échange d'énergie.

Les canaux ioniques permettent la diffusion des ions dans le sens du gradient de concentration. Ils créent une perméabilité sélective en ne permettant seulement qu'à certains ions de franchir la membrane.

C'est donc grâce à ces deux modes de transports des ions que les différents potentiels peuvent être créés. Le potentiel d'équilibre électrochimique d'un ion peut être calculé grâce à l'équation de Nernst :

$$E_x = \frac{RT}{zF} ln \frac{[X]_2}{[X]_1} \tag{2.3.1}$$

où E_x est le potentiel d'équilibre pour l'ion X, R est la constante des gaz parfaits $(8,3J)$, T la température absolue (en degré Kelvin), z la valence de l'ion et F la constante de Faraday $(96485,3\frac{C}{mol})$. Lorsque cette équation est appliquée aux systèmes biologiques, l'extérieur de la cellule (le milieu 2 dans nos équations) est pris, par convention, comme point de référence (le potentiel zéro). Cette équation, n'impliquant qu'un seul type d'ions, il est évident qu'elle ne convient pas parfaitement au cas d'une cellule de l'organisme. L'équation de Goldman prend en compte le gradient de plusieurs ions perméants et également leur perméabilité. Elle s'écrit comme suit :

$$V = \frac{RT}{Fln10} log \frac{P_K[K]_2 + P_{Na}[Na]_2 + P_{Cl}[Cl]_1}{P_K[K]_1 + P_{Na}[Na]_1 + P_{Cl}[Cl]_2} \tag{2.3.2}$$

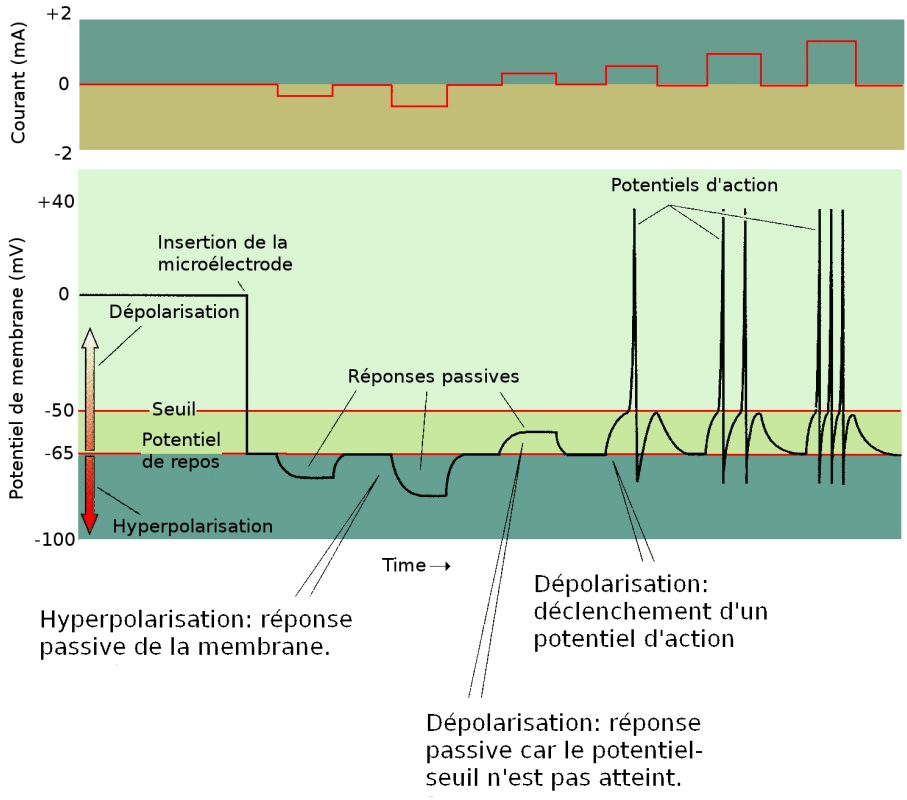


FIG. 2.6 – Réponses de la membrane en fonction des différents courants appliqués (image issue du livre Neurosciences [7]).

où V désigne le voltage transmembranaire et P désigne la perméabilité de la membrane à l'ion considéré. La valence n'étant plus considérée, les concentrations des ions chargés négativement (Cl^-) ont donc été inversées dans l'équation de Goldman par rapport à celle de Nernst.

2.3.1 Le potentiel de repos

Le potentiel de repos d'un neurone est d'environ $-70mV$. L'ion responsable de cette différence de potentiel négative avec le milieu extérieur est le potassium. Pour mieux en comprendre la raison, prenons le cas simple où la membrane est perméable au potassium et où sa concentration est cent fois plus importante à l'intérieur de la cellule. L'équation devient alors (à température ambiante) :

$$V = 58log\frac{1}{100} = -116mV$$

Cet exemple nous montre que si la concentration en potassium est plus élevée à l'intérieur qu'à l'extérieur de la membrane, le potentiel d'équilibre est alors négatif. Pour le sodium, si sa concentration est plus importante à l'extérieur qu'à

l'intérieur, le potentiel est alors positif. Et finalement, avec les mêmes concentrations et une certaine perméabilité aux deux ions, le potentiel a une valeur intermédiaire proche de 0. Le tableau 2.1 reprend les concentrations au repos des différents ions présents dans les cellules nerveuses. On peut remarquer que la

TAB. 2.1 – Concentrations ioniques intracellulaires et extracellulaires chez les mammifères.

Ion	Concentration(mM)	
	Intracellulaire	Extracellulaire
Potassium (K^+)	140	5
Sodium (Na^+)	$5-15$	145
Chlorure (Cl^-)	$4-30$	110
Calcium (Ca^{2+})	10^{-4}	$1-2$

concentration de potassium est bien plus importante à l'intérieur qu'à l'extérieur de la cellule. Ce fait est vérifié chez la plupart des espèces animales. Lorsque le potentiel de repos mesuré à l'aide d'une électrode et le potentiel d'équilibre de l'ion K^+ calculé à l'aide de l'équation 2.3.2 sont comparés, on remarque qu'ils sont fort proches (environ $-65mV$). Cela signifie, que la perméabilité du potassium au repos est plus importante que celle des autres ions. Donc le potassium est en effet responsable du potentiel de repos des cellules. Cette déduction a été confirmée par une expérience réalisée par Hodgkin et Katz[8] qui consistait à augmenter la concentration externe en potassium. Ils ont observé que le potentiel de repos de la membrane devenait moins négatif.

2.3.2 Le potentiel d'action

Comme nous l'avons déjà mentionné, le potentiel d'action est un changement soudain de la polarité de la membrane, du négatif vers le positif. Or, si l'on se réfère au tableau 2.1, le potentiel d'équilibre du sodium a une valeur positive. Donc, si la membrane a une grande perméabilité au Na^+, le potentiel transmembranaire est alors positif. On peut donc expliquer le potentiel d'action par un accroissement soudain de la perméabilité de la membrane au sodium. Pour confirmer cette hypothèse, Hodgkin et Katz ont diminué la concentration de Na^+ dans le milieu extracellulaire. Ils ont alors observé que la vitesse de montée du potentiel et son amplitude s'en voyaient réduites. Par contre, cette diminution de concentration n'a que très peu d'effet sur le potentiel de repos, ce qui confirme que la perméabilité au Na^+ au repos est très faible. Il n'y a donc pas de transport passif des ions Na^+. Or, la cellule doit recréer un gradient important pour être prête à déclencher le potentiel d'action suivant. Au repos, il y a donc un transport actif des ions de sodium vers le milieu extracellulaire pour créer ce gradient important. Lors du déclenchement d'un potentiel d'action, les canaux ioniques perméables au sodium s'ouvrent et entrainent une forte dépolarisation de la membrane.

2.3.3 Illustration chiffrée

Les neurones utilisent le mécanisme de potentiel d'action pour transmettre l'information sous forme de signaux électriques. Ce mécanisme est basé sur les

différences de concentrations entre le milieu intracellulaire et le milieu extracellulaire. Ces différences de concentration sont régulées par la perméabilité de la membrane aux différents ions. La figure 2.7 représente le potentiel transmembranaire au cours du temps lors d'un potentiel d'action. Au repos, la membrane

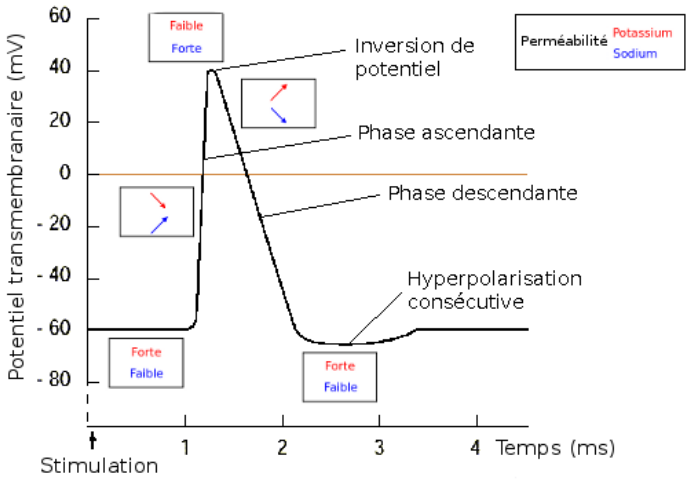


FIG. 2.7 – Courbe représentant le potentiel transmembranaire au cours du temps et les modifications des perméabilités de K^+ et de Na^+ lors d'un potentiel d'action.

est très perméable au potassium et, selon l'équation 2.3.2, c'est la proportion $\frac{[K^+]_{ext}}{[K^+]_{int}}$ qui fixe le potentiel de repos à environ $-65mV$. Lorsque que le neurone est soumis à une stimulation dépolarisante suffisante pour amener le potentiel transmembranaire jusqu'au potentiel seuil ($-50mV$), il déclenche un potentiel d'action. La perméabilité du potassium chute et celle du sodium monte subitement grâce à l'ouverture des canaux ioniques sodiques. Le potentiel transmembranaire tend donc à se rapprocher du potentiel d'équilibre électrochimique du sodium ($+58mV$). Ensuite, la cellule retrouve très rapidement un potentiel proche de celui de repos et rentre dans une phase d'hyperpolarisation consécutive due à la fermeture des canaux de Na^+ et à l'ouverture de ceux de K^+. Finalement, la membrane retrouve son potentiel de repos en atténuant l'augmentation de la perméabiltié de K^+. Pour expliquer la valeur du potentiel de repos et du pic du potentiel d'action, fixons dans le premier cas P_K à 2 et P_{Na} à $0,1$ et dans le deuxième cas P_K à $0,1$ et P_{Na} à 2 et utilisons les valeurs du tableau 2.1 (à une température de $37°C$).

$$V_{repos} = 266.10^{-4} ln \frac{2 \times 5 + 0,1 \times 145}{2 \times 140 + 0,1 \times 10} = -65,20mV$$

$$V_{picPA} = 266.10^{-4} ln \frac{2 \times 145 + 0,1 \times 5}{2 \times 10 + 0,1 \times 140} = 57,33mV$$

Ces valeurs sont données à titre d'illustration car les perméabiltés ont été fixées de manière arbitraire. La partie suivante aura pour but d'expliquer le comportement de ces perméabilités en fonction du voltage.

2.4 La perméabilité de la membrane dépendante du voltage

Les connaissances actuelles sur la perméabilité membranaire se fondent sur des données obtenues par la technique du voltage imposé (ou voltage clamp)[9]. La cinétique et les changements, en fonction du voltage, de perméabilité des ions potassium et sodium permettent d'expliquer complètement l'émission de potentiel d'action. Nous avons vu dans la partie précédente que c'est un accroissement transitoire de la perméabilté membranaire au Na^+ qui est responsable du déclenchement d'un potentiel d'action. Cet accroissement transitoire n'a cependant lieu que si le potentiel transmembranaire atteint une certaine valeur seuil. Cela signifie que le mécanisme régulant la perméabilité du sodium est lui-même dépendant du voltage. Donc si l'on peut expliquer comment un changement de potentiel active la perméabilité au sodium alors on peut expliquer comment sont produits les potentiels d'action. Pour prouver la dépendance au voltage des perméabiltés, Hodgkin et Huxley[10] ont fixé le potentiel transmembranaire premièrement à $-130mV$ (hyperpolarisation) et ensuite à $0mV$ (dépolarisation) et mesuré les courants ioniques transmembranaires. Lors d'une hyperpolarisation, ils ont observé un courant capacitif presque instantané (une fraction de milliseconde) qui n'est dû qu'à la redistribution des charges. Mais lors de la dépolarisation, après le courant capacitif, l'axone produit un courant ionique entrant à croissance rapide (entrée de cations ou sortie d'anions, et par conséquent entrée des charges positives dans la cellule) qui fait place à un courant sortant retardé à croissance lente. Donc si une dépolarisaiton produit des courants ioniques, cela signifie que le voltage influence bien les perméabilités membranaires des différents ions. Il y a donc deux courants ioniques différents, un courant entrant précoce et un courant sortant retardé. Dans la partie précédente nous avons affirmé que le courant entrant était dû aux ions Na^+ et le courant sortant aux ions de K^+. Pour prouver la première affirmation, Hodgkin et Huxley[10] ont premièrement dépolarisé la membrane jusqu'à une valeur de $+55mV$ alors que selon l'équation 2.3.1, $E_{Na} = +58mV$. Rappelons que si le potentiel est proche de l'équilibre électrochimique d'un ion, celui-ci ne produira pas de courant ionique même si la membrane est hautement perméable à cet ion. Ils n'ont alors observé aucun courant entrant. Ils ont ensuite éliminé les Na^+ du milieu externe de la cellule et dans ce cas, le courant précoce n'est plus entrant mais sortant. Ces deux expériences prouvent que le courant entrant précoce est porté par une entrée de Na^+ dans l'axone. Il faut également remarquer que la suppression du sodium dans le milieu externe n'a aucun effet sur le courant sortant retardé, ce qui signifie que le sodium n'est pas responsable de ce courant. Hodgkin et Huxley[11] ont montré que ce courant était dû à un flux de K^+ ce qui confirme la deuxième affirmation. Finalement, il faut préciser que l'amplitude du courant entrant n'est pas dépendante du potentiel de membrane contrairement au courant sortant. Lorsque l'on fixe le potentiel de membrane plus grand que le potentiel de repos, on produit donc deux effets repris dans le tableau 2.2.

Les différences entre ces deux courants suggèrent que les courants ioniques sont dus à deux mécanismes différents de perméabilité ionique. Une étude[12] pharmacologique démontre d'une part que la tétrodoxine bloque uniquement les courants de Na^+ et d'autre part que les ions tétaéthylamonium bloquent ceux

TAB. 2.2 – Caractéristiques des courants ioniques provoqués par une dépolarisation de la membrane.

Ion	Sens du flux	Instant	Durée	Amplitude par rapport à V_m
Na^+	entrant	précoce	transitoire	indépendante
K^+	sortant	retardée	longue	dépendant

de K^+. Ceci démontre bien que ces deux ions empruntent des canaux ioniques de perméabilités indépendantes. Pour le modèle, nous allons avoir besoin de décrire mathématiquement ces changements de perméabilité. Dans notre cas, nous allons assimiler la perméabilité à la conductance membranaire (g). Cette dernière obéit à la loi d'Ohm :

$$I_{ion} = g_{ion}(V_m - E_{ion}) \tag{2.4.3}$$

où I_{ion} est le courant ionique, V_m est le potentiel transmembranaire et E_{ion} est le potentiel d'équilibre de l'ion. La différence $(V_m - E_{ion})$ représente donc le gradient électrochimique agissant sur l'ion. Au vu des ces trois points :

- le potentiel transmembranaire pouvant être fixé grâce à la méthode du voltage imposé
- E_K et E_{Na} pouvant être calculés d'après les concentrations ioniques du tableau 2.1
- les courants I_{Na} et I_K pouvant être déterminés l'un et l'autre d'après les enregistrements des courants membranaires résultants de la dépolarisaiton en mesurant la différence entre les courants enregistrés en présence et en absence de Na^+ externe

il est possible de calculer g_K et g_{Na}. Deux conclusions peuvent dès lors être tirées de ce calcul :

- Les conductances potassique et sodique varient en fonction du temps. Les deux conductances subissent une activation. Celle du sodium arrive rapidement à son maximum et subit ensuite une inactivation rapide. Celle du potassium est quant à elle activée plus lentement. Les vitesses d'activation et d'inactivation sont proportionnelles à l'amplitude de la dépolarisation.
- Les conductances sont dépendantes du voltage. Les conductances maximums du sodium et du potassium augmentent avec l'amplitude de la dépolarisation.

La figure 2.8 nous montre le comportement des conductances potassique et sodique lors d'un potentiel d'action.

Pour résumer, les courants ioniques traversant la membrane du neurone lors d'une dépolarisation sont dus à trois processus différents :

- l'activation de g_{Na}
- l'activation de g_k
- l'inactivation de g_{Na}

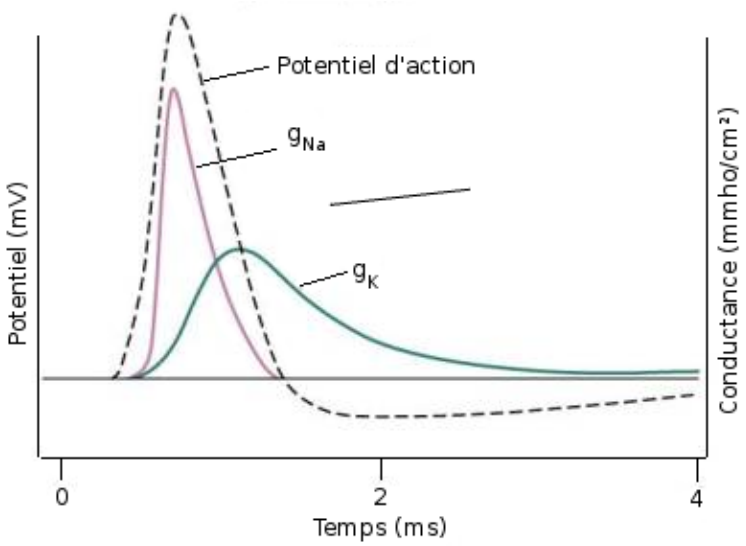


FIG. 2.8 – Variation des conductances potassique et sodique durant un potentiel d'action (image issue du livre Neurosciences [7]).

2.5 Principe de la stimulation électrique nerveuse fonctionnelle

La technique de la stimulation électrique nerveuse fonctionnelle [13] permet de restaurer des fonctions perdues ou de corriger des dysfonctionnements de l'organisme à l'aide d'impulsions électriques.

Le système nerveux humain se divise en deux composantes (voir section 2.2) : le système nerveux central (SNC) et le système nerveux périphérique (SNP). Ces deux composantes interagissent entre elles via des récepteurs et des effecteurs. Les premiers ont pour rôle de transmettre l'information au SNC (le récepteur sensoriel musculaire répond au coup de marteau, partie verte de la figure 2.9) et les seconds, de recevoir une commande du SNC (partie jaune de la figure 2.9) et d'effectuer l'action associée (le muscle fléchisseur de la jambe est relâché et le muscle extenseur est contracté).

Après un traumatisme ou une maladie, la communication entre le SNC et le SNP peut être interrompue, ce qui peut impliquer la perte ou le dysfonctionnement de certaines fonctions de l'organisme (motrices, sensorielles,...).

Par exemple, chez une personne atteinte de rétinite pigmentaire, la stimulation visuelle (la lumière) ne peut pas être convertie en signaux électriques car les photorécepteurs rétinaux sont abîmés. Cependant, la majorité des fibres du nerf optique est encore capable de transmettre l'information et le cortex visuel, de la traiter. Une stimulation artificielle du nerf optique peut donc permettre une perception visuelle[14].

Un autre exemple est celui d'une lésion au niveau de la épinière. L'information envoyée par le cerveau est alors bloquée au niveau de la lésion alors que les nerfs périphériques sont intacts. Dans ce cas, ces derniers peuvent être

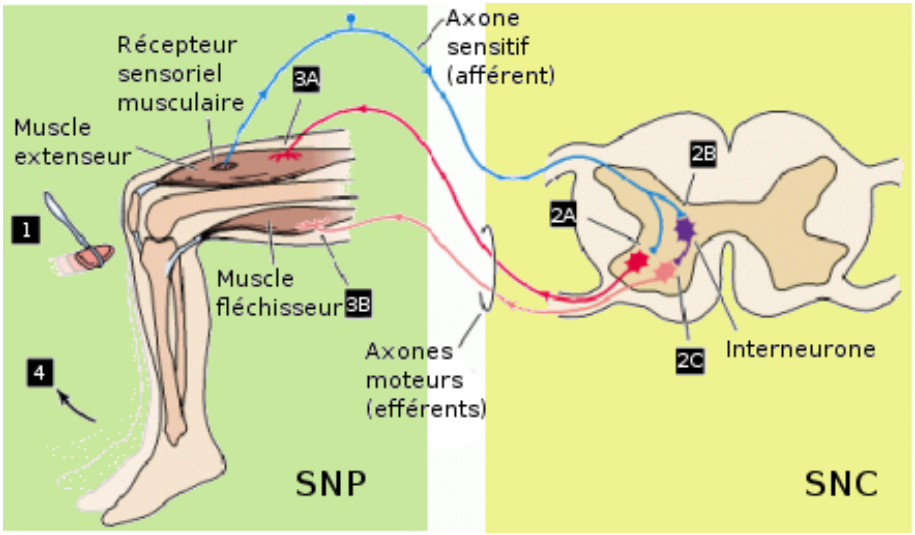


FIG. 2.9 – Réflexe myotatique (image issue de [7]). 1 : Le choc du marteau étire le tendon qui, à son tour, étire les récepteurs sensoriels du muscle extenseur de la jambe. 2A : Le neurone sensitif fait synapse avec un motoneurone spinal et l'excite. 2B : Le neurone sensitif excite également un interneurone spinal. 2C : La synapse de l'interneurone inhibe un motoneurone des muscles fléchisseurs. 3A : Un potentiel d'action est transmis jusqu'aux synapses avec les fibres du muscle extenseur et provoque sa contraction. 3B : Le muscle fléchisseur se relâche sous l'effet de l'inhibition de ses motoneurones. 4 : La jambe s'étend.

directement stimulés pour provoquer une contraction musculaire.

Un description théorique de la propagation des potentiels d'action a été donnée par le modèle de Hodgkin et Huxley[15], ensuite une nouvelle application pratique de l'électricité en médecine a été présentée par le pacemaker cardiaque artificiel. Il existait déjà une série de stimulateurs électriques proposés par différents chercheurs. Dans les années 1950, le développement de l'électronique a finalement permis à Wladimir Liberson[16] de créer un stimulateur qui empêchait l'effet de "foot-drop" chez les patients hémiplégiques. Toutes ces innovations ont mené à un nouveau champ de réhabilitation moderne, la stimulation électrique fonctionnelle (FES). Elle fut d'abord définie comme la stimulation électrique des muscles privés de contrôle nerveux dans le but de produire une contraction musculaire et un mouvement fonctionnel utile. De nos jours, en plus de ces applications mécaniques (battements cardiaques, mouvement,...), la FES est également utilisée pour réduire la douleur, aider à contrôler le flux urinaire, réduire les crises d'épilepsie, empêcher l'avancement d'une scoliose, améliorer la circulation sanguine, influencer le nerf auditif ou même le cortex visuel, etc.

Dans tous les cas cités ci-dessus une action précise est attendue suite à la stimulation électrique artificielle. Il est donc important de pouvoir prédire la réponse de la fibre nerveuse lors de sa stimulation. Cette réponse dépendra principalement de deux paramètres, la géométrie du système (diamètre de la fibre, configuration de l'électrode,...) et la forme de l'impuslion électrique. La

modélisation va donc pouvoir fournir cette prédiction en fonction de ces deux paramètres et ainsi éviter la réalisation de certaines expériences beaucoup plus coûteuses. Elle permettra également de mieux distinguer le rôle de chacun des paramètres.

Chapitre 3

Distribution des potentiels dans la fibre nerveuse

La distribution des potentiels électriques est une des deux entrées principales des modèles décrivant la réponse des fibres nerveuse. Son calcul est donc une étape indispensable dans la modélisation d'une FES.

Elle peut également être utilisée lors de l'évaluation de l'efficacité d'une électrode. Ce calcul n'est cependant résolvable analytiquement que dans très peu de cas simples. Pour des situations réelles, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques. Plusieurs solutions ont déjà été proposées, allant des cas les plus simples, jusqu'aux cas les plus complexes[4]. La plupart d'entres-elles utilisent la méthode des éléments finis en 3D.

La limitation de ce genre d'approches vient de la difficulté à construire un maillage représentant de manière précise la géométrie.

Par exemple, dans le cas d'un nerf entouré d'une électrode de type "cuff" (voir figure 3.1), l'ordre de grandeur des tailles des différentes couches du domaine est très différent. Certaines couches peuvent avoir une épaisseur de quelques μm et d'autres de quelques cm. Une des techniques pour pallier ce problème est une extrusion d'un maillage 2D avec ajout d'éléments rectangulaires représentant les couches de petites épaisseurs [4], c'est la méthode par extrusion. Une autre, proposée par S. Parrini en 1999 [3], utilise la méthode des éléments finis pour déterminer la solution en 2D et une décomposition spectrale de Fourier pour obtenir la solution dans la direction azimutale, c'est la méthode par Fourier[1]. Il a été montré plus tard [4] que des simplifications lors de l'implémentation de cette méthode avaient été faites amenant à des solutions incohérentes. Ces deux méthodes utilisent la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson sur le maillage. Cette partie débute avec une introduction théorique sur la méthode des éléments finis. Ensuite, la méthode par Fourier est détaillée ainsi que la méthode par extrusion, d'où découle l'explication du programme l'implémentant. Finalement, le choix de la seconde méthode est justifié.

[1] Le choix de ces deux noms (méthode par extrusion et méthode par Fourier) vient du fait que la différence principale entre les deux est la manière de passer du bidimensionnel au tridimensionnel.

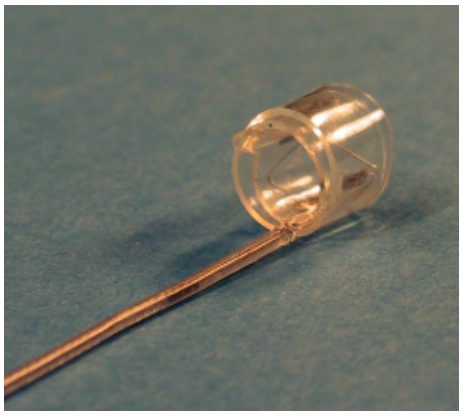


FIG. 3.1 – Electrode de type "cuff".

3.1 Méthode des éléments finis

La majorité de la théorie abordée dans cette partie provient du syllabus du cours d'introduction aux éléments finis du professeur V. Legat[17].

La méthode des éléments finis est une méthode numérique permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles aux conditions limites. Elle consiste en la résolution d'un problème équivalent au problème réel. Le problème est posé sur une géométrie approchée par un domaine Ω polygonal aux dimensions finies. Un espace d'approximation est ensuite défini par un maillage du domaine dont les mailles sont les éléments finis sur lesquels est résolue l'équation aux dérivées partielles. En bref, il s'agit donc de la discrétisation d'un problème permettant d'obtenir une solution approchée du problème considéré. Nous noterons également que pour que ce problème soit bien posé il doit satisfaire aux conditions suivantes :

- la solution existe
- la solution est unique
- la solution dépend continûment des données

Rajoutons que ce n'est pas parce que le problème initial (continu) est bien posé que sa discrétisation l'est également. Cette dernière, pour être bien posée doit quant à elle remplir les conditions suivantes :

- le problème continu doit être bien posé
- la procédure de discrétisation doit être stable
- il doit fournir une solution proche de la solution exacte

La définition correcte des conditions aux limites est un élément essentiel dans la méthode des éléments finis. Il existe plusieurs sortes de conditions aux limites. Dans notre cas, nous n'en utiliserons qu'une, la condition de Dirichlet ($u = f$). En effet, il a été montré [6] que lorsque la condition de Neumann est imposée aux bases du cylindre, les différences d'approximation trouvées sont négligeables.

3.1.1 L'équation de Poisson

La résolution de l'équation de Poisson sur un domaine ouvert Ω du plan (x, y) peut servir à modéliser beaucoup de problèmes de physique mathématique.

Par exemple, la conduction de chaleur, le transfert de masse et également la distribution de potentiels dans un volume. La formulation forte de cette équation est la suivante : trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{array}{lcll} \boldsymbol{\nabla} \cdot (a\boldsymbol{\nabla} u) + f & = & 0, & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{n} \cdot (a\boldsymbol{\nabla} u) & = & g, & \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \\ u & = & t, & \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \end{array} \tag{3.1.1}$$

La formulation faible quant à elle s'exprime comme suit :

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \widehat{u}) \cdot (a\boldsymbol{\nabla} u) d\Omega = \int_\Omega \widehat{u} f + \int_{\Gamma_N} (\widehat{u} g) ds, \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\chi} \tag{3.1.2}$$

Dans le cas d'une distribution de potentiels dans une fibre nerveuse, le a représente la conductivité du milieu, le u représente le potentiel, le f représente la source de courant, Γ_N représente la frontière sur laquelle la condition de Neumann est imposée et Γ_D représente la frontière sur laquelle la condition de Dirichlet est imposée, $\widehat{u}$ est une fonciton s'annulant sur Γ_N et $\widehat{\chi}$ est l'ensemble de fonctions $\widehat{u}$. Nous pouvons déjà préciser que la condition de Dirichlet, imposée sur les bords, oblige u à prendre une valeur nulle, en d'autres termes $t = 0$ ou encore $u \in \widehat{\chi}$ (conditions homogènes de Dirichlet). Pour la formulation faible, le χ représente dès lors un espace ne contenant que des fonctions qui s'annulent sur Γ_N.

3.1.2 La méthode en théorie

La plupart du temps, trouver une solution exacte à un problème de ce genre est impossible (sauf dans certains cas particuliers mais pas dans celui du calcul de la distribution des potentiels dans un volume). C'est pourquoi il convient d'utiliser une méthode numérique pour obtenir une approximation u^h de la solution exacte u. La méthode des éléments finis consiste à réécrire le problème sous la forme suivante :

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} U_j \tau_j(\boldsymbol{x}) \tag{3.1.3}$$

où U_j sont les valeurs nodales et τ_j sont les fonctions de formes. Les fonctions de formes sont choisies a priori et de telle manière qu'aucune ne puisse être obtenue par combinaison liénaire des autres. En général, et plus particulièrement dans notre cas, nous choisissons ces fonctions de formes [2] comme étant associées à un point spécifique de l'espace $\boldsymbol{X}_i$ (ensemble des noeuds) et respectant la propriété suivante :

$$\begin{array}{c} \tau_j(\boldsymbol{X}_i) = 1 \text{ si } i = j \\ \tau_j(\boldsymbol{X}_i) = 0 \text{ si } i \neq j \end{array}$$

ce qui équivaut à dire (en utilisant le symbole de Kronecker) que $\tau_j(\boldsymbol{X}_i) = \delta_{ij}$. On en déduit donc que les valeurs nodales sont les valeurs de l'approximation en $\boldsymbol{X}_i$. En effet, si on repart de l'équation 3.1.3 appliquée à un noeud particulier

$$u^h(\boldsymbol{X}_i) = \sum_{j=1}^{n} U_j \tau_j(\boldsymbol{X}_i)$$

[2] Ces fonctions de formes sont généralement définies grâce à un isomorphisme entre un élément quelconque et un élément parent défini a priori.

et qu'on y remplace $\tau_j(\boldsymbol{X}_i)$ par δ_{ij}, on obtient,

$$u^h(\boldsymbol{X}_i) = \sum_{j=1}^{n} U_j \delta_{ij} = U_i$$

avec $u^h(\boldsymbol{X}_i)$ représentant la valeur de l'approximation au point $\boldsymbol{X}_i$ et U_i la valeur nodale.

3.1.3 Une méthode variationnelle

La formulation discrète peut être exprimée de deux manières. Premièrement, grâce à l'équation 3.1.2 :

Trouver $u^h \in \chi^h$ tel que

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \hat{u}^h \cdot (a \boldsymbol{\nabla} u^h)) d\Omega = \int_\Omega (\hat{u}^h f) d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\hat{u}^h g) ds, \qquad \forall \hat{u}^h \in \chi^h$$

en précisant que χ^h est l'ensemble des solutions de l'approximation qui est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions que nous appellerons χ et deuxièmement grâce à une minimisation (recherche du $v^h \in \chi^h$ qui minimise l'expression suivante) :

Trouver $u^h \in \chi^h$ tel que

$$J(u^h) = min_{v^h \in \chi^h} [\frac{1}{2} \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} v^h \cdot (a \boldsymbol{\nabla} v^h)) d\Omega \tag{3.1.4}$$

$$- \int_\Omega (v^h f) d\Omega + \int_{\Gamma_N} (v^h g) ds]$$

Ces deux notations s'appellent respectivement la méthode de Galerkin et la méthode de Ritz mais sont totalement équivalentes. Cette formulation décrit donc un système de n équations à n inconnues. Pour le développement suivant, nous négligerons l'intégrale le long de Γ_N car nous savons que dans notre cas nous n'en aurons pas d'utilité. Substituons u^h dans l'équation 3.1.4 :

$$\begin{aligned}
&J(u^h) = \tfrac{1}{2} \textstyle\int_\Omega ((\boldsymbol{\nabla} u^h) \cdot (a \boldsymbol{\nabla} u^h)) d\Omega - \int_\Omega (u^h f) d\Omega \\
&J(u^h) = \tfrac{1}{2} \textstyle\int_\Omega ((\sum_{i=1}^n U_i \boldsymbol{\nabla} \tau_i) \cdot (\sum_{j=1}^n U_j a \boldsymbol{\nabla} \tau_j)) d\Omega - \int_\Omega ((\sum_{i=1}^n U_i \tau_i) f) d\Omega \\
&J(u^h) = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i U_j \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \tau_i) \cdot (a \boldsymbol{\nabla} \tau_j) d\Omega - \sum_{i=1}^n U_i \int_\Omega \tau_i f d\Omega
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

A présent, en définissant

$$A_{ij} = \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \tau_i) \cdot (a \boldsymbol{\nabla} \tau_j) d\Omega$$

et

$$B_i = \int_\Omega \tau_i f d\Omega,$$

on peut écrire que

$$J(u^h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_i U_j A_{ij} - \sum_{i=1}^{n} U_i B_j$$

Le minimum de cette fonction est obtenue lorsque

$$\frac{\delta J(u^h)}{\delta U_i} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}U_j - B_i = 0 \quad \forall i \in [1,n] \tag{3.1.6}$$

Ce qui revient à résoudre le système de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}U_j = B_i$$

.

3.1.4 Le maillage

Comme expliqué ci-dessus, la méthode des éléments finis consiste à trouver une approximation de la solution d'un problème continu en résolvant une discrétisation du problème sur un maillage. Ce dernier est constitué des éléments finis et est généralement à une, deux, voire trois dimensions. A une dimension, il permet, par exemple, de représenter une poutre.

Dans notre cas, nous utilisons un maillage à deux dimensions pour représenter une section du nerf et une extrusion de ce maillage (donc un maillage à trois dimensions) pour représenter le morceau du nerf considéré. La définition du maillage est une partie très importante de la méthode. En effet, il convient, par exemple, de choisir des éléments plus petits aux endroits du domaine où la solution varie rapidement. Le cas étudié dans ce travail est un bon exemple de l'importance du choix de la taille des éléments aux différents endroits du domaine, l'électrode et certaines couches du nerf ayant une épaisseur très petite par rapport à la taille totale du domaine. De plus, les informations à ces endroits sont recherchées. Il est donc nécessaire de choisir la taille de leurs éléments comme étant plus petite que leur propre épaisseur. Cependant, il est inutile[3] de placer des éléments d'aussi petite taille proche de la frontière du domaine, qui est en général constituée d'isolant et où l'information n'est pas primordiale. Dans cette partie, nous abordons les maillages bidimensionnels constitués d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux.

a) Les maillages bidimensionnels

Les éléments d'un maillage bidimensionnel doivent respecter une règle importante : deux éléments ne peuvent avoir comme intersection qu'un sommet ou un côté entier.

Le maillage en lui-même est défini par deux tableaux :

[3]Par inutile, on entend que cela augmenterait considérablement le temps de calcul et la taille des données pour obtenir une haute résolution à un endroit où l'information a peu d'intérêt.

– le tableau de coordonnées des sommets
– le tableau d'appartenance des sommets aux éléments, chaque ligne de ce tableau débutant par le numéro de l'élément suivi par les numéros des sommets qui en font partie

Il est donc important de numéroter les sommets et les éléments de manière unique.

La taille du maillage, quant à elle, est déterminée par trois nombres :
– le nombre de sommets
– le nombre de côtés
– le nombre d'éléments

Il est important de noter que l'approximation est calculée sur les noeuds et non sur les sommets. Par définition, un sommet est l'intersection entre plusieurs côtés d'un ou plusieurs éléments, tandis qu'un noeud est un point où est calculée une valeur discrète. Les noeuds et les sommets peuvent donc se trouver aux mêmes endroits dans le domaine mais sont deux concepts distincts.

b) Les éléments triangulaires

La différence fondamentale entre les différents types d'éléments est le choix des fonctions de forme. Pour obtenir les fonctions de forme, nous effectuons un isomorphisme entre un élément quelconque Ω_e et un élément parent Ω_p défini dans le plan $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ et dont les sommets ont pour coordonnées $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ et $P_3 = (0, 1)$. La relation entre cet Ω_e et Ω_p est donc :

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = (1 - \xi - \eta)\boldsymbol{X}_1^e + \xi \boldsymbol{X}_2^e + \eta \boldsymbol{X}_3^e \tag{3.1.7}$$

où $\boldsymbol{X}_1^e$,$\boldsymbol{X}_2^e$ et $\boldsymbol{X}_3^e$ représentent les trois sommets de l'éléments Ω_e. On peut vérifier cette relation en remplaçant $\boldsymbol{\xi}$ par les coordonnées d'un des sommets de l'élément parent, par exemple celles de P_2 :

$$\boldsymbol{x}((1, 0)) = (1 - 1 - 0) \times \boldsymbol{X}_1^e + 1 \times \boldsymbol{X}_2^e + 0 \times \boldsymbol{X}_3^e$$

$$\boldsymbol{x}((1, 0)) = \boldsymbol{X}_2^e$$

Il en est de même pour les deux autres points, donc la relation est bien vérifiée et on peut dire que $x(\boldsymbol{P_i}) = \boldsymbol{X}_i^e$.

Il faut maintenant choisir la fonction de forme pour chaque noeud qui vaut l'unité sur ce dernier et qui est nulle sur les autres noeuds. Le nombre de noeuds détermine le degré du ou des polynômes que sont les fonctions de forme et inversément. Prenons comme exemple des polynômes linéraires et choisissons comme noeuds les trois sommets de Ω_p, les 3 fonctions de forme sont alors :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

c) Les éléments quadrilatéraux

Pour un élément quadrilatère, les sommets de l'élément parent ont pour coordonnées $P_1 = (1, 1)$,$P_2 = (-1, 1)$,$P_3 = (-1, -1)$ et $P_4 = (1, -1)$. La relation 3.1.7 devient dès lors :

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}\boldsymbol{X_1^e} + \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}\boldsymbol{X_2^e}$$

$$+\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\boldsymbol{X_3^e}+\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\boldsymbol{X_4^e}$$

et les polynômes de dergé 1 deviennent :

$$\phi_1(\xi,\eta)=(1+\xi)(1+\eta)/4$$

$$\phi_2(\xi,\eta)=(1-\xi)(1+\eta)/4$$

$$\phi_3(\xi,\eta)=(1-\xi)(1-\eta)/4$$

$$\phi_4(\xi,\eta)=(1+\xi)(1-\eta)/4$$

On peut donc maintenant réécrire l'équation 3.1.3, autant pour des triangles que pour des quadrilatères, comme suit :

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{p+1}U_i^e\phi_i^e(\boldsymbol{x})$$

avec $\boldsymbol{x}\in\Omega_e$, U_i^e les valeurs nodales locales inconnues a priori, p le degré des polynômes et $\phi_i^e(\boldsymbol{x})=\phi_i(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}))$ les fonctions de formes.

3.2 La méthode par Fourier

Cette méthode, développée par S. Parrini[3], sert à calculer la distribution des potentiels électriques générés par une électrode de type cuff implantée autour d'un nerf axisymétrique et inhomogène. Elle est basée sur la méthode des éléments finis, croisée avec une décomposition spectrale de Fourier pour obtenir une approximation du comportement azimutal de la solution. Cette section détaille l'application de la théorie expliquée dans la partie précédente. Cette méthode a l'avantage de ne nécessiter qu'un maillage 2D.

3.2.1 Théorie

En supposant que les conditions de quasi-staticité[4] soient remplies, le problème peut être formulé en terme du potentiel électrique u :

$$\nabla\cdot(K^{(i)}\nabla u)+f=0 \tag{3.2.9}$$

avec $K^{(i)}$ le tenseur de conductivité et f la densité de courant.

Dans ce développement, $\tilde{u}(r,z,\theta)$ représente la solution numérique du problème. Premièrement définissons un maillage dans le plan (r,z) comme un ensemble de points $P_i=(r_i,z_i)$, $i=1,2,...,N$. Les fonctions de formes bidimensionnelles associées au maillage $\{P_i\}$ sont notées $\tau_i(r,z)$. Et pour finir, les $g_m(\theta)$ représentent un ensemble de fonctions périodiques, de période 2π, avec $m=0,\pm1,...,\pm M$ et permettent de définir les fonctions de formes tridimensionnelles comme suit :

$$\phi_i^m(r,z,\theta)\doteq\tau_i(r,z)g_m(\theta) \tag{3.2.10}$$

[4]Une transformation est considérée comme quasi-statique s'il elle est constituée d'une succession d'états d'équilibre.

Nous recherchons une solution $\tilde{u}$ sur le domaine généré par les fonctions ϕ_i^m, donc $\tilde{u}$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des ces fonctions de base dont seuls les coefficients, ici notés U_i^m, doivent être calculés :

$$\tilde{u}(r,z,\theta) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{i=1}^{N} U_i^m \phi_i^m(r,z,\theta) \tag{3.2.11}$$

Le vecteur U est déterminé par la méthode de Galerkin (voir 3.1.3) qui conduit à résoudre un système linéaire $AU = B$ de dimension $(2M+1)N$ où les termes a_{ij}^{mn} de la matrice A et les termes b_j^n du vecteur B sont définis par

$$\begin{array}{rcl} a_{ij}^{mn} & = & \int_\Omega k(\nabla\phi_i^m)(\nabla\phi_j^n)d\Omega \\ b_j^n & = & \int_\Omega f\phi_i^m d\Omega \end{array} \tag{3.2.12}$$

Développons a_{ij}^{mn}. Effectuons le changement de variables en coordonnées cylindriques

$$a_{ij}^{mn} = \int_\Omega rk((\nabla\phi_i^m)(\nabla\phi_j^n))drdzd\theta$$

détaillons les gradients,

$$a_{ij}^{mn} = \int_\Omega rk(\frac{\delta\phi_i^m}{\delta r}, \frac{\delta\phi_i^m}{\delta z}, \frac{\delta\phi_i^m}{\delta\theta}\frac{1}{r})(\frac{\delta\phi_j^n}{\delta r}, \frac{\delta\phi_j^n}{\delta z}, \frac{\delta\phi_j^n}{\delta\theta}\frac{1}{r})drdzd\theta$$

et finalement, développons le produit scalaire,

$$a_{ij}^{mn} = \int_\Omega rk(\frac{\delta\phi_i^m}{\delta r}\frac{\delta\phi_j^n}{\delta r} + \frac{\delta\phi_i^m}{\delta z}\frac{\delta\phi_j^n}{\delta z} + \frac{\delta\phi_i^m}{\delta\theta}\frac{\delta\phi_j^n}{\delta\theta}\frac{1}{r^2})drdzd\theta \tag{3.2.13}$$

Contrairement à une approche classique d'éléments finis en trois dimensions, nous n'allons pas définir un maillage selon θ mais choisir g_m comme étant

$$g_m(\theta) \doteq \begin{cases} cos(m\theta) \text{ pour } m \geq 0 \\ sin(m\theta) \text{ pour } m < 0 \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Dans notre cas, nous savons déjà que notre solution est paire par rapport à rz (voir figure 3.2). Dans le cas d'une fonction paire, nous savons que les coefficients de Fourier U_i^m sont réels et que par conséquent seuls les cosinus sont nécessaires (voir [18] p.256-259).

Dès lors, nous pouvons écrire en substituant l'équation (3.2.14) dans (3.2.10)

$$\begin{array}{c} \phi_i^m(r,z,\theta) = \tau_i(r,z)cos(m\theta) \\ \phi_j^n(r,z,\theta) = \tau_j(r,z)cos(n\theta) \end{array} \tag{3.2.15}$$

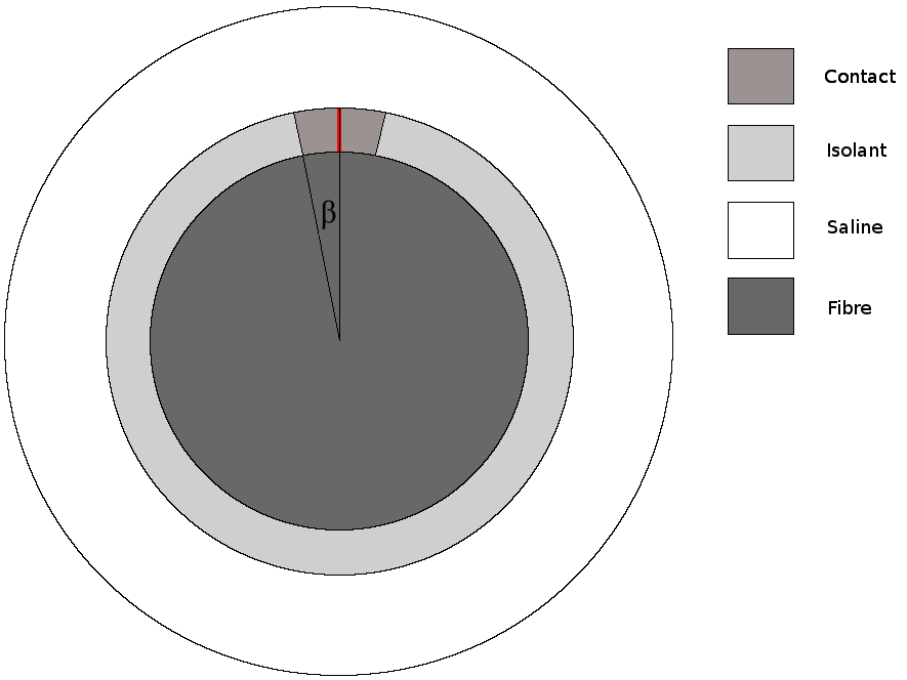


FIG. 3.2 – Géométrie simplifiée d'une fibre nerveuse entourée d'une électrode de type cuff. La ligne rouge représente l'axe central du contact qui est l'axe de symétrie de la solution.

Nous pouvons maintenant substituer (3.2.15) dans (3.2.13)

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{mn} &= \int_\Omega rk[\tfrac{\delta\tau_i cos(m\theta)}{\delta r}\tfrac{\delta\tau_j cos(n\theta)}{\delta r} \\
&\quad +\tfrac{\delta\tau_i cos(m\theta)}{\delta z}\tfrac{\delta\tau_j cos(n\theta)}{\delta z} \\
&\quad +\tfrac{\delta\tau_i cos(m\theta)}{\delta\theta}\tfrac{\delta\tau_j cos(n\theta)}{\delta\theta}\tfrac{1}{r^2}]drdzd\theta \\
a_{ij}^{mn} &= \int_\Omega rk[cos(m\theta)cos(n\theta)\tfrac{\delta\tau_i}{\delta r}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta r} \\
&\quad +cos(m\theta)cos(n\theta)\tfrac{\delta\tau_i}{\delta z}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta z} \\
&\quad +\tau_i\tau_j\tfrac{\delta cos(m\theta)}{\delta\theta}\tfrac{\delta cos(n\theta)}{\delta\theta}\tfrac{1}{r^2}]drdzd\theta \qquad (3.2.16) \\
a_{ij}^{mn} &= \int_\Omega rk[cos(m\theta)cos(n\theta)\tfrac{\delta\tau_i}{\delta r}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta r} \\
&\quad +cos(m\theta)cos(n\theta)\tfrac{\delta\tau_i}{\delta z}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta z} \\
&\quad +(\tau_i\tau_j)\tfrac{mn}{r^2}sin(m\theta)sin(n\theta)]drdzd\theta \\
a_{ij}^{mn} &= \int_\Omega rk[cos(m\theta)cos(n\theta)(\tfrac{\delta\tau_i}{\delta r}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta r}+\tfrac{\delta\tau_i}{\delta z}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta z}) \\
&\quad +(\tau_i\tau_j)\tfrac{mn}{r^2}sin(m\theta)sin(n\theta)]drdzd\theta
\end{aligned}$$

$$a_{ij}^{mn} = k\{\int_{\Omega_\theta} cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta \int_{\Omega_{r,z}} r(\frac{\delta\tau_i}{\delta r}\frac{\delta\tau_j}{\delta r} + \frac{\delta\tau_i}{\delta z}\frac{\delta\tau_j}{\delta z})drdz \\ + \int_{\Omega_\theta} sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta \int_{\Omega_{r,z}} \frac{mn}{r}(\tau_i\tau_j)drdz\} \tag{3.2.17}$$

De la même manière nous pouvons réécrire b_j^n

$$b_j^n = \int_\Omega rf\tau_j cos(n\theta)drdzd\theta \tag{3.2.18}$$

Les termes en cosinus et sinus de l'équation (3.2.17) peuvent être calculés analytiquement et pour ce, nous considérons que le domaine s'étend de $-\alpha$ à α et sur le diamètre de la fibre nerveuse dans les directions r et z.

$$\int_{\Omega_\theta} cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta = 2\int_0^\alpha cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta$$
$$\int_{\Omega_\theta} sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta = 2\int_0^\alpha sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta$$

si $m \neq \pm n$

$$\begin{aligned} 2\int_0^\alpha cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta &= \int_0^\alpha cos((m+n)\theta) + cos((m-n)\theta)d\theta \\ &= [\frac{sin((m+n)\theta)}{m+n} + \frac{sin((m-n)\theta)}{m-n}]_0^\alpha \\ &= \frac{sin((m+n)\alpha)}{m+n} + \frac{sin((m-n)\alpha)}{m-n} \end{aligned}$$

si $m = \pm n$ et $m \neq 0$

$$\begin{aligned} 2\int_0^\alpha cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta &= \int_0^\alpha 1 + cos(2m\theta)d\theta \\ &= [\theta + \frac{sin(2m\theta)}{2m}]_0^\alpha \\ &= \alpha + \frac{sin(2m\alpha)}{2m} \end{aligned}$$

si $m = n = 0$

$$\begin{aligned} 2\int_0^\alpha cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta &= 2\int_0^\alpha 1d\theta \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

si $m \neq \pm n$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta &= \int_0^\alpha cos((m-n)\theta) - cos((m+n)\theta)d\theta \\ &= [\frac{sin((m-n)\theta)}{m-n} - \frac{sin((m+n)\theta)}{m+n}]_0^\alpha \\ &= \frac{sin((m-n)\alpha)}{m-n} + \frac{sin((m+n)\alpha)}{m+n} \end{aligned}$$

si $m = n$ et $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta &= \int_0^\alpha 1 - cos(2m\theta)d\theta \\ &= [\theta - \frac{sin(2m\theta)}{2m}]_0^\alpha \\ &= \alpha - \frac{sin(2m\alpha)}{2m} \end{aligned}$$

si $m = -n$ et $m \neq 0$

$$\int_0^\alpha sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta \quad = \frac{sin(2m\alpha)}{2m} - \alpha$$

si $m = n = 0$

$$\int_0^\alpha sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta = 0$$

A ce stade du développement il est bon de rappeler que les fonctions de formes sont choisies de manière à ce qu'elles ne puissent être obtenues par combinaisons linéaires des autres. Il est donc clair que le terme $(\tau_i\tau_j)$ n'est différent de 0 que lorsque i et j sont égaux, c'est-à-dire lorsqu'un seul nœud du maillage est considéré (sur la diagonale de A) et dans ce cas il est égal à 1.

Par la suite, nous notons

$$\int_{\Omega_\theta} cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta = g_{Aint}(m,\theta)$$

et

$$\int_{\Omega_\theta} sin(m\theta)sin(n\theta)d\theta = g_{Dint}(m,\theta)$$

Nous pouvons donc résumer par

$$g_{Aint}(m) = \begin{cases} \frac{sin((m+n)\alpha)}{m+n} + \frac{sin((m-n)\alpha)}{m-n} \text{ pour } m \neq \pm n \\ \alpha + \frac{sin(2m\alpha)}{2m} \text{ pour } m = \pm n \text{ et } m \neq 0 \\ 2\alpha \text{ pour } m = n = 0 \end{cases}$$

$$g_{Dint}(m) = \begin{cases} \frac{sin((m-n)\alpha)}{m-n} + \frac{sin((m+n)\alpha)}{m+n} \text{ pour } m \neq \pm n \\ \alpha + \frac{sin(2m\alpha)}{2m} \text{ pour } m = n \text{ et } m \neq 0 \\ \frac{sin(2m\alpha)}{2m} - \alpha \text{ pour } m = -n \text{ et } m \neq 0 \\ 0 \text{ pour } m = n = 0 \end{cases}$$

Apportons maintenant quelques précisions quant au domaine. Au niveau des dimensions en r et en z, il est clair qu'elles sont respectivement le diamètre du cylindre et la hauteur du cylindre. En ce qui concerne la direction θ, le domaine s'étend de $-\pi$ à π et la conductivité k, dépendante du matériau, est une fonction échelon selon θ sur la sous-couche de l'électrode alors que c'est une constante sur les autres. Nous pouvons donc définir $g_{int,e}$ comme étant la fonction g_{int} sur la couche de l'électrode et $g_{int,ne}$ pour les autres. Dans ce cas, nous pouvons écrire en remplaçant α par π pour les $g_{int,ne}(m)$ et par β et $(\pi - \beta)$ pour les $g_{int,e}(m)$, avec β la moitié de l'angle défini par l'électrode (voir Fig.3.2).

$$kg_{Aint,ne}(m) = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq \pm n \\ k\pi \text{ pour } m = \pm n \text{ et } m \neq 0 \\ 2k\pi \text{ pour } m = n = 0 \end{cases}$$

$$kg_{Aint,e}(m) = \begin{cases} [k_c(\frac{sin((m+n)\beta)}{m+n} + \frac{sin((m-n)\beta)}{m-n}) \\ +k_{iso}(\frac{sin((m+n)(\pi-\beta))}{m+n} + \frac{sin((m-n)(\pi-\beta)}{m-n})] \\ \text{pour } m \neq \pm n \\ k_c(\beta + \frac{sin(2m\beta)}{2m}) + k_{iso}((\pi-\beta) + \frac{sin(2m(\pi-\beta))}{2m}) \\ \text{pour } m = \pm n \text{ et } m \neq 0 \\ 2k_c\beta + 2k_{iso}(\pi-\beta) \\ \text{pour } m = n = 0 \end{cases}$$

$$kg_{Dint,ne}(m) = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq \pm n \\ k\pi \text{ pour } m = n \text{ et } m \neq 0 \\ -k\pi \text{ pour } m = -n \text{ et } m \neq 0 \\ 0 \text{ pour } m = n = 0 \end{cases}$$

$$kg_{Dint,e}(m) = \begin{cases} k_c(\frac{sin((m-n)\beta)}{m-n} + \frac{sin((m+n)\beta)}{m+n}) \\ +k_{iso}(\frac{sin((m-n)(\pi-\beta))}{m-n} + \frac{sin((m+n)(\pi-\beta))}{m+n}) \\ \text{pour } m \neq \pm n \\ k_c(\beta + \frac{sin(2m\beta)}{2m}) + k_{iso}((\pi-\beta) + \frac{sin(2m(\pi-\beta))}{2m}) \\ \text{pour } m = n \text{ et } m \neq 0 \\ k_c(\frac{sin(2m\beta)}{2m} - \beta) + k_{iso}(\frac{sin(2m(\pi-\beta))}{2m} - (\pi-\beta)) \\ \text{pour } m = -n \text{ et } m \neq 0 \\ 0 \\ \text{pour } m = n = 0 \end{cases}$$

avec k_c la conductivité du contact et k_{iso}, la conductivité de l'isolant.

Nous pouvons maintenant effectuer la même opération sur l'équation (3.2.18) et calculer analytiquement $\int_{\Omega_\theta} cos(n\theta)d\theta$ mais dans ce cas, étant donné que la conductivité n'intervient pas, les bornes de l'intégrale sont bien $-\pi$ et π.

si $n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(n\theta)\theta = [\frac{sin(n\theta)}{n}]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

si $n = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1d\theta = [\theta]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Ensuite, nous pouvons réécrire les équations (3.2.17) et (3.2.18)

$$\begin{aligned} a_{ij}^{mn} &= kg_{Aint}\int_{\Omega_{r,z}} r(\tfrac{\delta\tau_i}{\delta r}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta r}+\tfrac{\delta\tau_i}{\delta z}\tfrac{\delta\tau_j}{\delta z})drdz \\ &\quad +g_{Dint}\int_{\Omega_{r,z}} \tfrac{mn(\tau_i\tau_j)}{r} \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$b_j^n = \begin{cases} 2\pi\int_{\Omega r,z} rf\tau_j drdz \text{ pour } n=0 \\ \\ 0 \text{ pour } n\neq 0 \end{cases} \tag{3.2.20}$$

Pour calculer $\int_{\Omega_{r,z}} r(\frac{\delta\tau_i}{\delta r}\frac{\delta\tau_j}{\delta r}+\frac{\delta\tau_i}{\delta z}\frac{\delta\tau_j}{\delta z})drdz$, nous utilisons la méthode décrite dans [17] (p.60-64) et la technique d'intégration numérique de Gauss-Legendre décrite également dans [17] (p.64-66). L'intégrale (3.2.20) est également évaluée grâce à la méthode de Gauss-Legendre.

Intéressons-nous maintenant à la structure de la matrice A et du vecteur B. A est une matrice carrée de dimension $(2M+1)N$ remplie avec les termes a_{ij}^{mn} décrit par (3.2.19). Le i et le j représentent les indices des nœuds du maillage et le m et le n représentent les modes utilisés pour la décomposition spectrale de Fourier. La matrice A est donc une matrice carrée de dimension $2M+1$ constituée de sous-matrices carrées de dimension N.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & \ddots & \\ \vdots & & A_{(2M+1)(2M+1)} \end{pmatrix} \tag{3.2.21}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{i,j} & a_{12}^{i,j} & \cdots \\ a_{21}^{i,j} & \ddots & \\ \vdots & & a_{NN}^{i,j} \end{pmatrix}$$

B quant à lui est un vecteur de longueur $(2M+1)N$ ou encore un vecteur de longueur $2M+1$ constitué de sous-vecteurs de longueur N.

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_{(2M+1)} \end{pmatrix}$$
$$B_i = \begin{pmatrix} b_1^i & b_2^i & \cdots & b_N^i \end{pmatrix}$$

Par conséquent la résolution du système $U = A/B$ donnera un vecteur vertical de longueur $(2M+1)N$. Maintenant que nous savons comment obtenir le vecteur de coefficient, revenons à l'équation (3.2.11)

$$\tilde{u}(r,z,\theta) = \sum_{m=-M}^{M}\sum_{i=1}^{N} U_i^m \phi_i^m(r,z,\theta)$$

qui peut être réécrite comme suit

$$\tilde{u}(r,z,\theta) = \sum_{m=-M}^{M}\sum_{i=1}^{N} U_i^m \tau_i(r,z)cos(m\theta)$$

Rappelons que la fonction de forme bidimensionnelle τ_i vaut 1 sur le nœud i et 0 ailleurs, donc l'équation précédente est équivalente à

$$\tilde{u}(r,z,\theta) = \sum_{m=-M}^{M} U^m(r,z)cos(m\theta)$$

ce qui signifie que pour obtenir la solution sur un nœud, il faut sommer la multiplication des coefficients par un cosinus pour m allant de $-M$ à M. Ces coefficients sont obtenus par la résolution du système linéaire décrit ci-dessus. Cette opération nous permet donc de repasser du domaine fréquentiel au domaine spatial et les U^m sont les coefficients de Fourier permettant de reconstruire la fonction.

3.2.2 Algorithme

Nous avons donc décrit la méthode complète permettant de calculer la solution à n'importe quel endroit du domaine, décrivons à présent l'algorithme utilisé pour implémenter cette méthode.

```
Pour chaque m = 0: M
  Pour chaque n = 0: M
    Calcul de l'integrale de gm pour A et pour B
    Pour chaque i_element = 1: nombre d'elements dans la maillage 2D
      Localisation de la couche dans laquelle se trouve l'element
      Calcul de la densite de courant
      Pour chaque k = 1: nombre de points d'integration de Gauss-Legendre
        Pour chaque l = 1: nombre de points d'integration de Gauss-Legendre
          Remplissage de la matrice A et du vecteur B locaux (Gauss-Legendre)
      Assemblage de la matrice A  partir des matrices A locales
      Assemblage du vecteur B  partir des vecteurs A locaux
    Pour chaque i_bnd = 1: nombre de lignes frontieres du maillage 2D
      Condition de Dirichlet
        Imposition d'une valeur constante dans notre cas nulle

Division matricielle U=A/B

Pour chaque theta = -pi: pi
  Pour chaque m = 0: M
    Usolution(theta) = Usolution(theta) + U(m:m+N)*cos(m*theta)
```

$U_{solution}$ est donc une matrice qui contient un nombre de lignes égales au nombre de nœuds du maillage 2D et un nombre de colonnes dépendant de la fréquence d'échantillonage angulaire choisie.

3.3 La méthode par extrusion

Cette méthode se divise en trois parties bien disctinctes les unes des autres :

1. La génération du maillage bidimensionnel
2. L'extrusion du maillage bidimensionnel et donc la génération du maillage tridimensionnel
3. La résolution de l'équation de Poisson sur ce maillage tridimensionnel

Dans cette partie, nous expliquons premièrement la théorie de ces trois étapes et ensuite le fonctionnement des trois programmes correspondants implémentés par A. de Potter d'Indoye lors de son travail de fin d'étude[6]. Attachons-nous principalement à décrire les entrées et sorties de chacun des trois programmes de manière à permettre à n'importe qui de remplacer l'un des trois programmes sans devoir pour autant en comprendre le fonctionnement ni celui des deux autres.

3.3.1 Théorie

La première chose nécessaire avant même de créer le maillage bidimensionnel est une définition claire de la géométrie. Cette dernière n'est définie que sur une seule coupe du nerf dans le plan (x, y). Une des contraintes de cette méthode est l'hypothèse que les coupes du nerfs sont identiques. Cela représente donc une des contraintes de cette méthode [5].

Détaillons maintenant les trois phases de la méthode.

a) Génération du maillage bidimensionnel

La **première étape** de cette génération est *la triangulation de Delaunay*[19]. Cette dernière est un recouvrement de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points P_i par des triangles qui possèdent deux propriétés :

- tous ces triangles respectent le critère de Delaunnay : un triangle de Delaunay est un triangle qui a comme sommet trois points de l'ensemble P_i et qui ne contient aucun élément de P_i à l'intérieur de son cercle circonscrit (voir le cercle bleu sur la fig.3.3)
- la triangulation de Delaunay est celle qui parmi toutes les triangulations maximise l'angle minimum de tous les triangles (voir agrandissement sur la figure 3.3).

En d'autres termes, c'est le recouvrement de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points P_i par des triangles qui :

- ont comme sommets trois points de l'ensemble P_i
- ne se chevauchent pas les uns les autres (ont comme intersection maximum un point ou un côté complet)
- se rapprochent le plus possible de triangles équilatéraux

La génération du maillage bidimensionnel sur la section d'un nerf consiste en son recouvrement par une triangulation de Delaunay contrainte par la frontière du domaine. La donnée initiale de la génération de ce maillage est une discrétisation des frontières du domaine. Cela nous permet de savoir que le programme de génération de maillage a comme entrées les coordonnées de l'ensemble de points représentant la discrétisation de chaque frontière du domaine.

Cette triangulation est obtenue grâce à l'algorithme de Watson[20]. Ce dernier est initialisé par la création d'un super-triangle englobant la totalité des points (les sommets de ce triangle ne faisant pas obligatoirement partie de l'ensemble de points). Ensuite les quatre étapes suivantes (illustrées sur la figure 3.4) sont répétées pour chaque point de l'ensemble :

1. Ajout d'un point P de l'ensemble de points

[5] Rappelons que pour la méthode par Fourier, cette contrainte est également présente mais qu'en plus le nerf doit être axisymétrique.

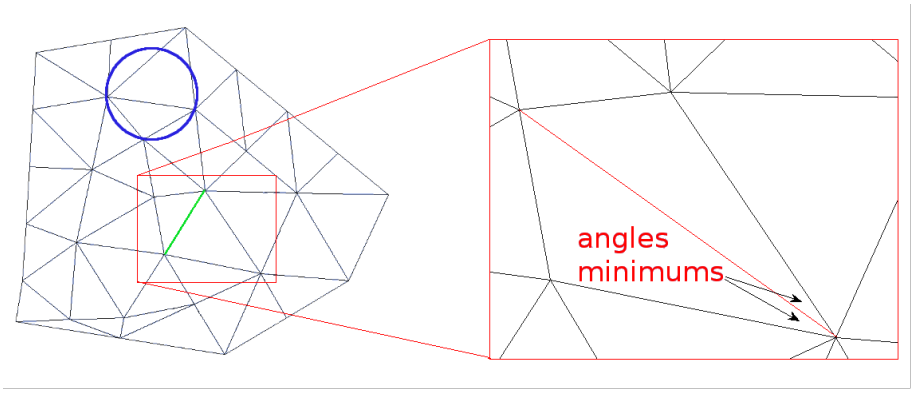


FIG. 3.3 – Le graphe de gauche nous montre un exemple de triangulation de Delaunay et l'agrandissement modifié se trouvant à droite nous montre un exemple de triangulation qui ne respecte pas la deuxième propriété citée ci-dessus. En effet, on peut facilement remarquer que les angles minimums des triangles adjancents à la ligne rouge sur l'agrandissement ont des angles minimums plus petits que tous les angles des triangles adjacents à la ligne verte sur la triangulation de Delaunay. Par ailleurs, le cercle bleu est un exemple de cercle circonscrit à un des triangles et illustre la première propriété. En effet, aucun autre sommet ne se situe à l'intérieur de ce cercle.

2. Suppression des triangles desquels le cercle circonscrit contient le point P
3. Liaison des sommets des triangles supprimés avec le point P
4. Basculement, si nécessaire, des arêtes pour que tous les triangles respectent le critère de Delaunay et retour à l'étape 1

Une fois tous les points ajoutés, le super-triangle est supprimé ainsi que tous les segments dont l'une des extrêmités est un de ses sommets.

Nous avons déjà abordé l'importance de la taille des éléments du maillage et l'importance d'avoir des éléments plus petits aux endroits où la fonction varie rapidement. Il est donc nécessaire de savoir comment faire pour affiner le maillage aux endroits d'intérêt.

La première manière utilise le fait que la triangulation prend comme entrée l'ensemble de points qui représente la discrétisation des frontières de chaque couche biologique du nerf. On peut donc être certain que tous les points se trouvant dans cet ensemble se retrouvent dans le maillage. Il suffit d'augmenter le nombre de points formant les frontières des couches biologiques qui se trouvent aux endroits à forte variation.

La deuxième manière est de donner une fonction de densité. Cette fonction prend des valeurs plus importantes aux endroits où l'on désire une information détaillée et inversément. Dans le travail de A. de Potter d'Indoye[6], cette fonction de densité dépend de la position par rapport au centre de la section du nerf (voir figure 3.5). Ce choix a été fait car dans le cas étudié, les informations recherchées se trouvent plus au centre étant donné que la périphérie du volume est généralement constitué d'isolant.

La **deuxième étape**, assez triviale, consiste à attribuer un label à chaque élément pour préciser à quelle couche biologique il appartient et pour pouvoir,

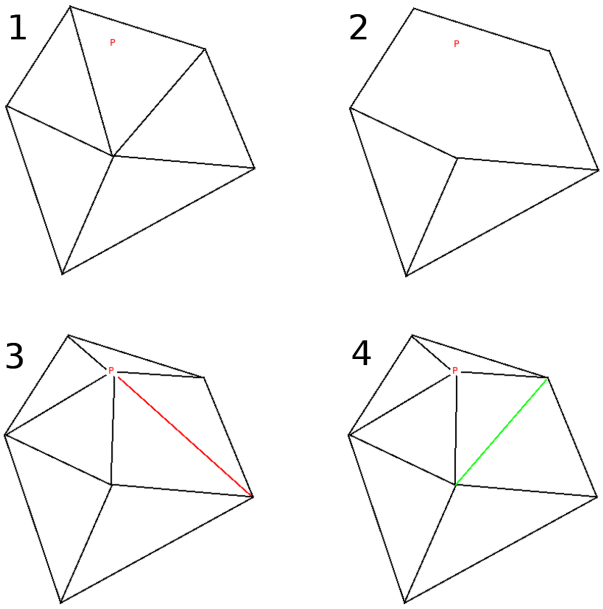


FIG. 3.4 – Les quatre étapes de l'algorithme de Watson.

par exemple, a posteriori, déterminer les frontières des différentes couches.

La **troisième étape** de la génération du maillage bidimensionnel est le remplacement des éléments triangulaires se situant dans les couches fines par des éléments quadrilatéraux. Cette modification a l'avantage de diminuer de moitié le nombre d'éléments dans ces parties du maillage. Cette perte de qualité est compensée lors de l'intégration numérique effectuée dans la résolution de l'équation de Poisson. En effet, lors de l'extrusion d'un élément quadrilatéral, un élément hexaédrique est obtenu à la place d'un élément prismatique pour un triangle. Un élément hexaédrique permet d'effectuer une intégration numérique sur huit points au lieu de six pour les prismatiques. Cette différence fournit donc une meilleure approximation de la solution exacte.

Expliquons maintenant comment effectuer cette modification.

- Parmi les segments formant les éléments consituant deux couches adjacentes, les segments se situant sur la frontière sont détectés. Cette détection se fait grâce au label. Un segment est toujours adjacent à deux triangles différents. Or, chaque triangle possède un label. Si le label du premier triangle est différent du label du deuxième triangle, le segment commun aux deux triangles se trouve sur la frontière.
- Il faut ensuite définir les nouveaux points qui vont former les quadrilatères. Pour ce faire, l'ensemble des points P_i, avec $i = 1, n$ pour n étant égal au nombre de points de la frontière, se trouvant sur la frontière est parcouru. A partir de chacun de ces points, un nouveau point P_i^f est créé. Il est placé sur la résultante de la normale $\overrightarrow{P_i, P_i^{f-1}}$ au segment (P_i, P_{i-1}) et de la normale $\overrightarrow{P_i, P_i^{f+1}}$ au segment (P_i, P_{i+1}) à une distance d, valant l'épaisseur de la couche fine considérée (cette démarche est illustrée sur la

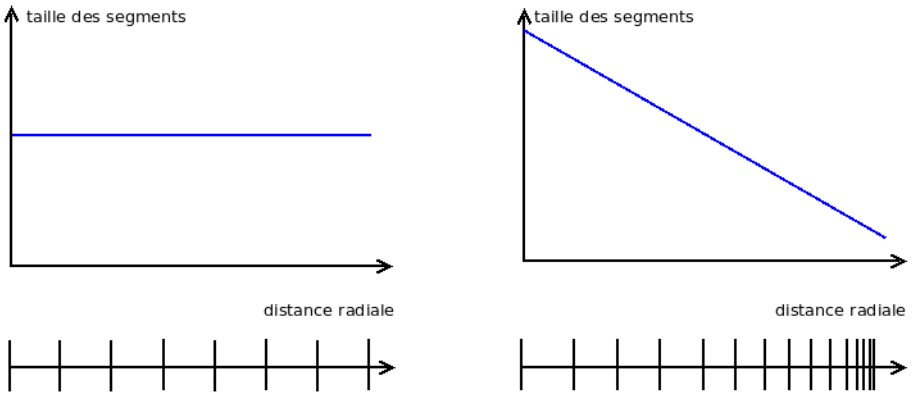


FIG. 3.5 – Ces graphes sont deux exemples de fonctions représentant la taille des éléments du maillage par rapport à leur distance radiale. Au plus cette taille est petite au plus la densité est importante.

figure 3.6).

– Finalement, il faut vérifier que le nouveau point P_j^f se trouve du bon côté de la frontière grâce au label. Si ce n'est pas le cas, il faut déplacer le point P_j^f sur le point P_j^{fo} à l'opposé du point P_{ij} en modifiant ses coordonnées comme suit :

$$x(P_i^{fo}) = x(P_i) - (x(P_i^f) - x(P_i)) = 2x(P_i) - x(P_i^f)$$

$$y(P_i^{fo}) = y(P_i) - (y(P_i^f) - y(P_i)) = 2y(P_i) - y(P_i^f)$$

Cette modification du maillage des couches fines rajoute la contrainte suivante : l'épaisseur des couches fines doit être inférieure à la longueur des côtés des triangles adjacents pour que le maillage reste régulier.

Le résultat de ces trois étapes est donc un maillage bidimensionnel composé d'éléments triangulaires et quadrilatéraux.

b) Extrusion du maillage bidimensionnel

L'extrusion est une opération assez simple qui consiste à rajouter une troisième coordonnée aux coordonnées des noeuds du maillage bidimensionnel et à répéter la section précédemment générée à différents niveaux de l'axe longitudinal du nerf. Pour cette opération, il faut définir l'épaisseur e_i (distance entre deux sections) de chaque "tranche" à créer. Il est nécessaire de préciser que cette opération d'extrusion et les paramètres qui la définissent sont surtout importants pour l'application d'un modèle complet. Si, comme dans le cadre de ce travail, on se limite au calcul de la distribution, le passage au tridimensionnel n'est pas le plus important. Cependant, le résultat de ce calcul de distribution ayant pour but de servir à l'application d'un modèle de fibre nerveuse pour modéliser son comportement lors d'une FES, il faut donc rendre totalement paramétrable cette opération et surtout expliquer son importance de manière claire à l'utilisateur qui, a priori, pourrait n'avoir aucune connaissance en méthodes numériques et plus particulièrement sur la méthode des éléments finis.

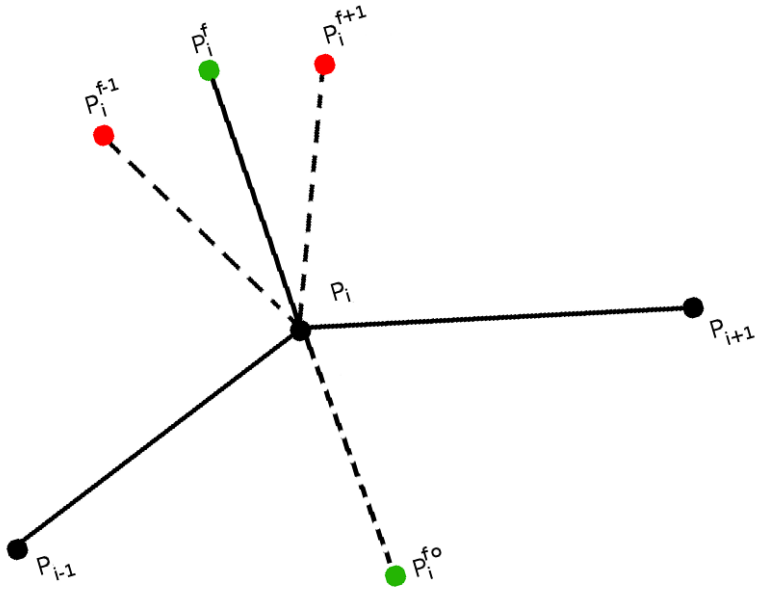


FIG. 3.6 – Création des points servant à former les quadrilatères du maillage des couches fines.

Etant donné que l'on copie exactement le maillage d'une section le long de l'axe longitudinal, cette extrusion repose sur l'hypothèse que le nerf ne se déforme pas le long de cet axe et qu'il conserve toujours exactement la même géométrie.

Comme l'objectif final est de prédire la réponse de fibres nerveuses myélinisées à une stimulation électrique, l'épaisseur des "tranches" doit valoir au maximum la distance L entre deux noeuds de Ranvier qui est proportionnelle au diamètre D de la fibre nerveuse : $\frac{L}{D} = 100$.

La première étape consiste en la création des nouveaux noeuds. Connaissant les coordonnées en x et en y de chaque noeud, les deux seules opérations à effectuer sont la numérotation et le calcul de la coordonnée en z.

$$n_i = n_0 + s.N$$

$$n_i(n_{0,x}, n_{0,y}, z_s)$$

avec n_i le numéro du nouveau noeud, n_0 le numéro du noeud correspondant sur la section originale, s le numéro de la section sur laquelle se trouve n_i, N le nombre de noeuds sur une section, $(n_{0,x}, n_{0,y})$ les coordonnées en x et en y du point n_0 et z_s la coordonnée en z de la section s.

Le programme détecte ensuite les noeuds se trouvant aux frontières du domaine pour leur imposer la condition homogème de Dirichlet. Pour ce faire, il recherche les noeuds des segments n'appartenant qu'à un seul élément. Notons que cette étape ne nécessite pas d'information supplémentaire.

Finalement, bien qu'il soit logique que les éléments des nouvelles sections créées aient le même label que l'élément correspondant sur la section initiale,

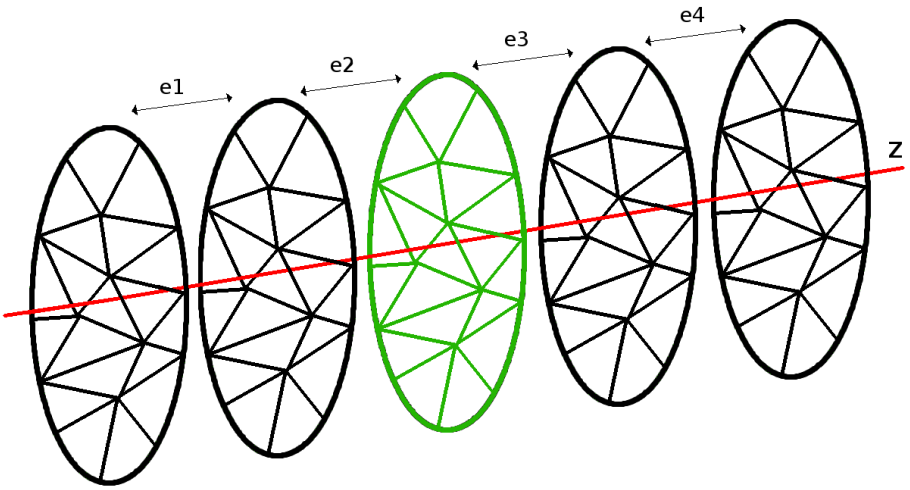


FIG. 3.7 – Extrusion du maillage bidimensionnel pour obtenir un maillage tridimensionnel. L'extrusion consiste à copier le maillage bidimensionnel, en vert, à différents endroits de l'axe longitunal z du volume considéré en fonction de l'épaisseur désirée pour chaque "tranche".

il y a cependant des exceptions. En effet, bien que l'hypothèse que le nerf ne se déforme pas ait été faite, l'électrode n'est pas présente tout le long du nerf. La conductivité des couches représentant l'électrode est donc une combinaison de fonctions échelons (en z). Les dimensions longitudinales de ces différentes couches et les labels correspondants aux différentes zones doivent donc être donnés. Sur la figure 3.8, la ligne horizontale pointillée est une ligne sur laquelle la conductivité varie longitudinalement. Elle passe du milieu extérieur au contact métallique en traversant l'isolant de l'électrode, les trois milieux ayant des conductivités fort différentes.

c) Résolution de l'équation de Poisson

Comme pour la méthode par Fourier, l'approximation $u(x)$ s'obtient par la résolution de Poisson sur le maillage tridimensionnel obtenu précédemment. Rappelons cette équation avec quelques précisions liées à cette méthode :

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot (k_i \nabla u_i) + f = 0, & \forall x \in \Omega_i \\ u_i = u_j, & \forall x \in \delta\Omega_i \cap \delta\Omega_j \\ k_i \frac{\delta u_i}{\delta n} = k_j \frac{\delta u_j}{\delta n}, & \forall x \in \delta\Omega_i \cap \delta\Omega_j \\ u = 0, & \forall x \in \Gamma_D \end{array} \tag{3.3.22}$$

avec f représentant la densité volumique de courant, u l'approximation et k la conductivité. Cette dernière est liée au label des différentes couches. Notons que la densité volumique de courant est une fonction nulle sur la totalité du

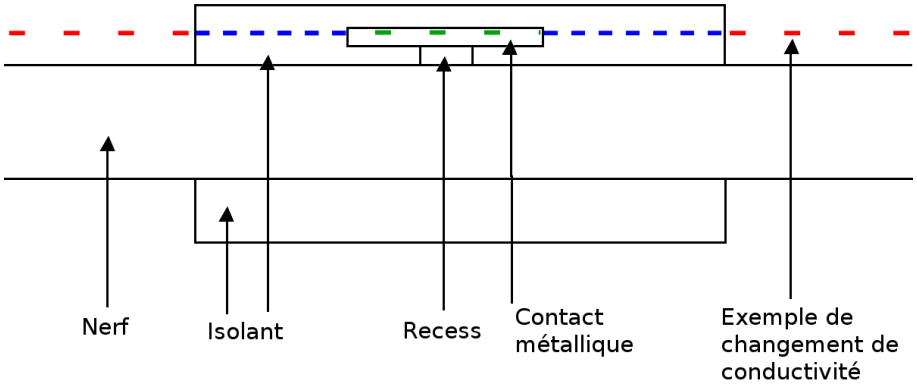


FIG. 3.8 – Configuration schématique du nerf entouré par une électrode de type cuff. Cette figure illustre le changement longitudinal de milieu et donc de conductivité hors du nerf. Sur la ligne horizontale pointillée, les changements de couleur et de taille des tirets représentent ces changements de milieu.

domaine excepté sur le contact métallique où elle prend une valeur constante $f = \frac{I}{V}[\frac{A}{m^3}]$. Le programme a donc besoin comme entrée du label associé au contact métallique.

Cette équation est ensuite résolue par la méthode des éléments finis introduite précédemment (voir section 3.1).

Il faut également noter que le calcul de distribution se fait toujours avec une seule électrode car pour obtenir la distribution des potentiels due à une configuration comprenant plusieurs électrodes, il suffit de sommer la solution de chacune des électrodes séparément. Ce calcul peut toujours être fait avec un courant unitaire car la solution est directement proportionnelle à ce courant[6].

3.3.2 Fonctionnement du programme

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, le calcul de la distribution de potentiel dans une fibre nerveuse par la méthode par extrusion se divise en trois étapes bien distinctes, représentées par le numéro correspondant sur la figure 3.9 :

1. La génération du maillage bidimensionnel, nom du programme **mesh2D**.
2. L'extrusion du maillage bidimensionnel et l'obtention du maillage tridimensionnel, nom du programme **extrusion**.
3. La résolution de l'équation de Poisson sur ce maillage, nom du programme **fem**.

Une bonne compréhension du fonctionnement de cette implémentation peut permettre d'en modifier une partie indépendamment des autres. Si l'on souhaite ne modifier que l'une des partie (1, 2 ou 3), son entrée pourra également être modifiée (les paramètres donnés par l'utilisateur ne seront peut-être plus indentiques). Mais, pour assurer la cohérence du programme, il est évidemment

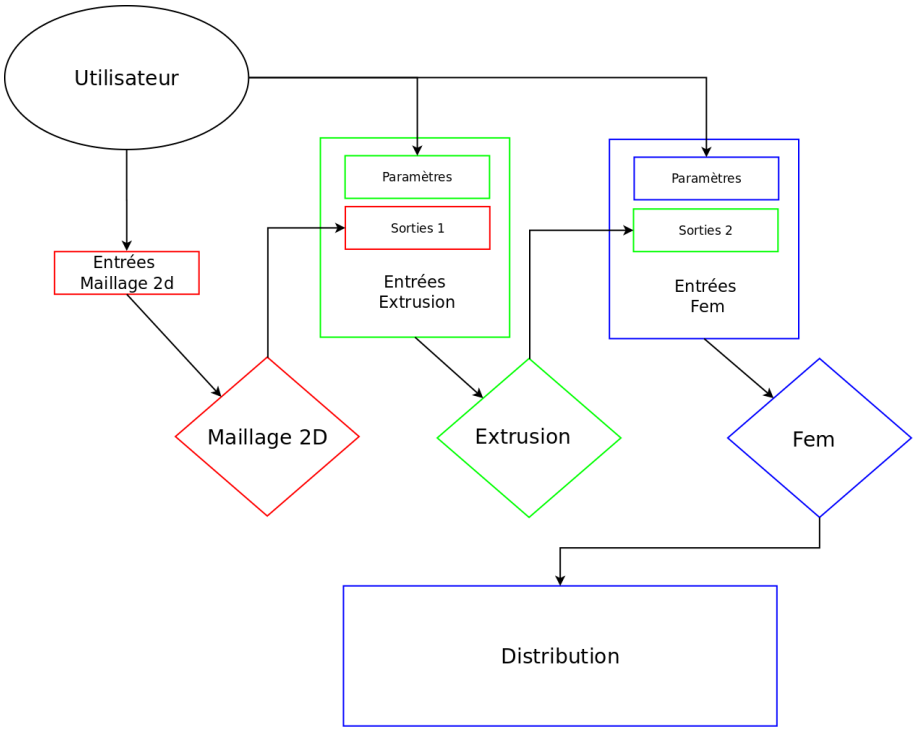


FIG. 3.9 – Graphe représentant la structure de l'implémentation de la méthode par extrusion.

important que son output reste identique. Le but étant de rendre le programme modulable, nous allons donc nous concentrer principalement aux entrées et aux sorties plutôt qu'à l'implémentation elle-même.

Précisons dès à présent que les fichiers d'entrées doivent être placés dans des répertoires bien précis[6] :

- Input de **mesh2D** : "./input_mesh2D/"
- Input de **extrusion** : "./input_extrusion/"
- Input de **fem** : "./input_fem/"

Les sorties de **mesh2D** et de **extrusion** étant une partie de l'entrée respectivement de **extrusion** et **fem**, elles doivent être placées dans le répertoire approprié.

Les fichiers de sorties de **fem** doivent être placés dans le répertoire "./distribution/".

Tous les fichiers contiennent le nom de la distribution, soit dans leur nom, soit dans leur contenu. Dans cette partie, appelons la distribution : *name*.

Notons que les labels évoqués dans la partie précédente sont implémentés par le mot "color" dans la totalité du programme.

[6] Jusqu'à présent ces placements doivent être faits manuellement par l'utilisateur mais cette opération est automatisée grâce à l'interface graphique, voir chapitre 4.

a) Génération du maillage bidimensionnel

Cette partie est consacrée aux entrées et à la sortie du programme de génération du maillage 2D (les boîtes rouges de la figure 3.9 reprises sur la figure 3.10).

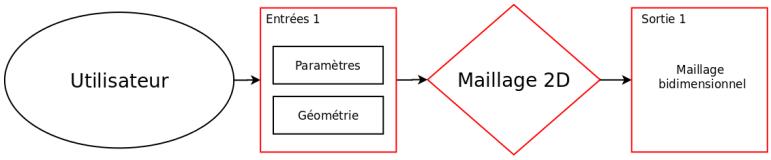


FIG. 3.10 – Graphe représentant la structure de l'implémentation de la génération du maillage bidimensionnel.

Géométrie L'utilisateur doit tout d'abord fournir la géométrie du domaine sur lequel la distribution va être calculée[7]. Rappelons que cette géométrie représente une discrétisation des frontières des différentes couches biologiques.

nom du fichier "*name_geom*"

structure du fichier Le fichier contient plusieurs boucles qui représentent chaque objet présent dans la géométrie. Chaque boucle doit être décrite selon les règles suivantes et par ordre décroissant de taille :

- Elle doit commencer par une ligne contenant "loop i", avec $i = 0, n-1$, n étant le nombre total d'objets. La numérotation doit commencer à 0 et évoluer de manière incrémentale.
- Elle doit ensuite contenir n lignes définissant chacune un des n points de la discrétisation de l'objet. Chacune de ces lignes doit commencer par l'abscisse du point suivi d'un espace et terminer par l'ordonnée du point.
- Elle doit terminer par une ligne contenant "end".
- Elle doit être suivie d'une ligne vide (même la dernière boucle).

Voici un exemple d'un fichier de description de géométrie contenant deux objets : un rectangle contenu dans un cercle. La figure 3.11 représente la géométrie décrite.

```
loop 0
-100.0 -1.2246467991473532E-14
-50.00000000000002 86.60254037844385
49.999999999999986 86.6025403784439
100.0 2.4492935982947064E-14
50.000000000000036 -86.60254037844383
-49.99999999999994 -86.60254037844392
end

loop 1
```

[7] L'un des objectifs de l'interface graphique est d'automatiser la création de cette géométrie.

```
-25.0 10.0
25.0 10.0
25.0 -10.0
-25.0 -10.0
end
```

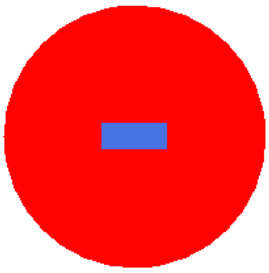


FIG. 3.11 – Exemple de géométrie.

Paramètres Dans ce fichier, se trouvent tous les paramètres dont le programme *mesh2D* a besoin pour fonctionner.

nom du fichier "*inputMesh2D.txt*"

structure du fichier Le fichier a la structure suivante (les lignes vides entre chaque champ sont obligatoires) :

```
Electrode type: name

Geometry: name_geom

Number of nodes: 500

Number of objects: 2

Quality: 0 50.0

color for object 1: 1

color for object 2: 2
```

Décrivons chacun des champs :

Electrode type nom de la distribution (*name*).

Geometry nom du fichier contenant la géométrie.

Number of nodes nombre de noeuds désirés dans le maillage.

Number of objects nombre d'objets présents dans la géométrie

Quality la qualité du maillage représente la qualité Q de son triangle le moins équilatéral (selon Frey et Borouchaki[21]) : $Q = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{L}{\rho}$, avec L la longueur du plus grand côté du triangle, ρ le rayon

de la sphère inscrite au triangle. Pour augmenter la qualité d'un maillage il faut augmenter son nombre de noeuds pour le rendre plus régulier[22].

color for object i numéro du label de l'object i.

Maillage bidimensionnel Ce fichier contient toutes les informations concernant le maillage généré.

nom du fichier "*name_ dataMesh*"

structure du fichier Le fichier a la structure suivante :

- première ligne : "TRIANGLES n_t", avec n_t égal au nombre de triangles présents dans le maillage.
- n_t lignes : "$p1$ $p2$ $p3$ color i", avec $p1$, $p2$ et $p3$ les indices des sommets du triangle et i son label.
- ligne suivant le dernier triangle : "COORDINATES n_n", avec n_n le nombre de noeuds du maillage.
- n_n lignes : "j x y", avec j le numéro du noeud, x son abscisse et y son ordonnée.

Voici un exemple d'un fichier décrivant un maillage composé d'un seul triangle.

```
TRIANGLES 1
0 1 2 color 1
COORDINATES 3
0 0 0
1 0 1
2 1 0
```

b) Génération du maillage tridimensionnel

Cette partie est consacrée aux entrées et à la sortie du programme d'extrusion (les boîtes vertes de la figure 3.9 reprises sur la figure 3.12).

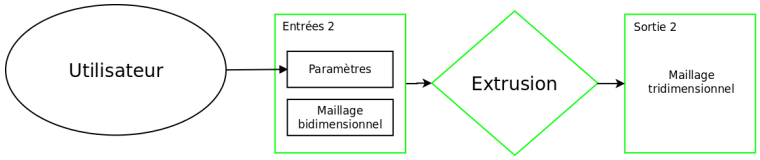


FIG. 3.12 – Graphe représentant la structure de l'implémentation de la génération du maillage tridimensionnel.

Paramètres Dans ce fichier, se trouvent tous les paramètres dont le programme *extrusion* a besoin pour fonctionner.

nom du fichier "*inputExtrusion.txt*"

structure du fichier Le fichier a la structure suivante :

```
Data 0
name_dataMesh
Thicken 1
```

```
Thickness: 10
Layer in: 2
Layers out 1: 1
New label: 9
Extrusion 0
Number of sections: 5
500
500
500
500
500
Number of short layers: 4
2 3
6500 1 13500 2 20000 1
3 3
6500 1 13500 3 20000 1
7 5
6500 1 9775 2 10225 7 13500 2 20000 1
8 5
6500 1 9500 2 10500 8 13500 2 20000 1
Output 0
name
```

Décrivons, chacun des champs :

Data 0 la ligne suivante contient le nom du fichier de données (la description du maillage bidimensionnel).

Thicken *i* les lignes suivantes contiennent les paramètres nécessaires pour l'ajout de i couches d'éléments quadrilatéraux. Les lignes allant de "Thicken" jusque "new label" dont répétées i fois.

Thickness épaisseur de la couche d'éléments quadrilatéraux.

Layer in label de la couche intérieure adjancente à la nouvelle couche d'éléments quadrilatéraux.

Layers out *j* labels des j couches extérieures adjancentes à la nouvelle couche d'éléments quadrilatéraux. Les j labels doivent être séparés par un espace.

New label label de la nouvelle couche.

Extrusion 0 les lignes suivantes contiennent les données concernant l'extrusion proprement dite.

Number of sections nombre de sections n_s du maillage tridimensionnel. Cette ligne est suivie par n_s lignes contenant chacune l'épaisseur d'une section.

Number of short layers nombre de couches n_c qui n'ont pas une conductivité longitudinale constante. Cette ligne est suivie par n_c paires de lignes. La première ligne de chacune de ces paires spécifie d'abord le label de la couche considérée et ensuite le nombre de zones de conductivité différente de cette couche. La deuxième

ligne spécifie les dimensions des différentes zones et le label qu'il faut leur attribuer. Sur l'exemple de fichier de paramètres donné ci-dessus, il y a quatre couches qui n'ont pas une conductivité longitudinale constante. La première est celle qui a le label 2 et elle possède trois zones de conductivité différente. La première zone s'étend de 0 à 6500 et est associée au label 1, la deuxième s'étend de 6500 à 13500 et est associée au label 2 et la troisième s'étend de 13500 à 20000 et est associée également au label 1. La ligne horizontale pointillée de la figure 3.8 peut par exemple être représentée dans ce fichier par la troisième couche mentionnée.

Output 0 la ligne suivante contient le nom de la distribution permettant de créer le fichier de sortie.

Maillage Ce fichier contient toutes les informations concernant le maillage tridimensionnel généré.

nom du fichier "*name_ dataExtrusion*"

structure du fichier Le fichier a la structure suivante :

- première ligne : "ELEMENTS n_e", avec n_e égal au nombre d'éléments prismatiques (extrusion d'éléments triangulaires) ou hexaédriques (extrusion d'éléments quadrilatères), présents dans le maillage.
- deuxième ligne : "PRISMS n_p", avec n_p égal au nombre d'éléments prismatiques.
- n_p lignes : "$p1$ $p2$ $p3$ $p4$ $p5$ $p6$ color i", avec $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$ et $p6$ les indices des sommets du prisme et i son label.
- ligne suivant le dernier prisme : "HEXAS n_h", avec n_h égal au nombre d'éléments hexaédriques.
- n_h lignes : "$p1$ $p2$ $p3$ $p4$ $p5$ $p6$ $p7$ $p8$ color i", avec $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$, $p6$, $p7$ et $p8$ les indices des sommets de l'hexaèdre et i son label.
- ligne suivant le dernier hexaèdre : "COORDINATES n_n", avec n_n le nombre de noeuds du maillage.
- n_n lignes : "x y z", avec x son abscisse, y son ordonnée et z sa coordonnée longitudinale (le numéro des noeuds n'est pas spécifié mais ceux-ci sont décrits dans l'ordre croissant).
- ligne suivant le dernier noeud : "BOUNDARIES n_b", avec n_b le nombre de frontières différentes.
- ligne suivante : n_b naturels représentant le nombre de noeuds de chaque frontière.
- n_b lignes contenant le numéro des noeuds de chaque frontière.

Voici le fichier décrivant le maillage de la figure 3.13.

```
ELEMENTS 6
PRISMS 4
1 2 6 7 8 12 color 1
1 6 5 7 12 11 color 1
7 8 12 13 14 18 color 1
7 12 11 13 18 17 color 1
HEXAS 2
2 3 4 5 8 9 10 11 color 2
8 9 10 11 14 15 16 17 color 2
COORDINATES 18
```

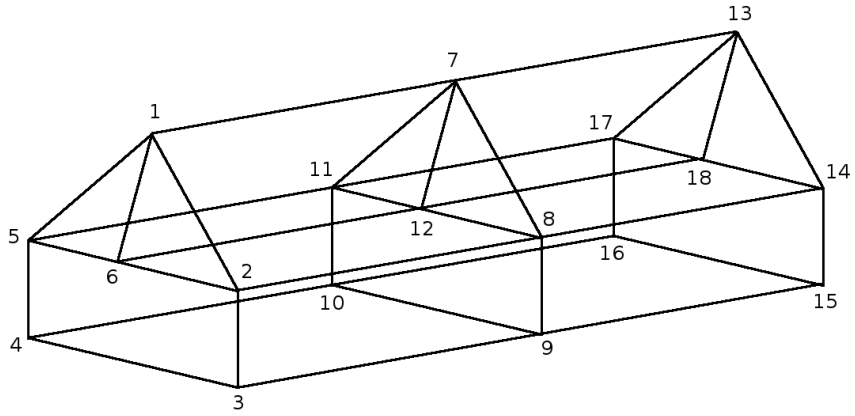


FIG. 3.13 – Exemple d'un maillage tridimensionnel obtenu par extrusion d'un maillage bidimensionnel composé de deux triangles et d'un quadrilatère.

```
1 2 0
2 1 0
2 0 0
0 0 0
0 1 0
1 1 0
1 2 3
2 1 3
2 0 3
0 0 3
0 1 3
1 1 3
1 2 6
2 1 6
2 0 6
0 0 6
0 1 6
1 1 6
BOUNDARIES 3
6 6 5
1 2 3 4 5 6
13 14 15 16 17 18
7 8 9 10 11
```

c) Résolution de l'équation de Poisson

Cette partie est consacrée aux entrées et aux sorties du programme de résolution de l'équation de Poisson (les boîtes bleues de la figure 3.9 reprises sur la figure 3.14).

Le schéma de cette dernière étape est représenté par la figure 3.14.

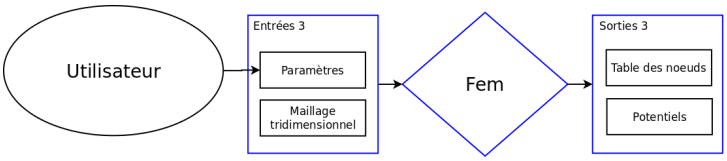


FIG. 3.14 – Graphe représentant la structure de l'implémentation de la résolution de l'équation de Poisson sur le maillage tridimensionnel.

Paramètres Dans ce fichier, se trouvent tous les paramètres dont le programme *fem* a besoin pour fonctionner.

nom du fichier "*inputFEM.txt*"

structure du fichier Le fichier a la structure suivante :

```
Data 0
name
Conductivities 4
color 1 1.0e-006 1.0e-006 1.0e-006
color 2 1.0e-006 1.0e-006 1.0e-006
color 3 8 8 0.5
color 4 1.0e+004 1.0e+004 1.0e+004
Dirichlet 3
boundary 1: 0
boundary 2: 0
boundary 3: 0
Stimulation 1
color 4: 2.0e+010
Solve 0
Print 0
name
```

Décrivons, chacun des champs :

Data 0 la ligne suivante contient le nom de la distribution.

Conductivities n_c le nombre n_c de milieux différents. Cette ligne est suivie de n_c lignes débutant par *color* suivi du numéro du label du milieu et se terminant par la valeur de la conductivité du milieu dans les trois directions (dans l'ordre x y z).

Dirichlet n_d le nombre n_d de frontières sur lesquelles est imposée la condition de Dirichlet. Cette ligne est suivie de n_d lignes servant à préciser quelle est la valeur imposée sur ces frontières (a priori 0, étant donné que nous imposons une condition homogène de Dirichlet).

Stimulation n_s le nombre n_s de milieux qui sont des sources (les contacts métalliques). Comme nous l'avons précisé plus haut, n'importe quelle ditribution peut être obtenue par combinaison

linéaire de ditributions obtenues sur des configurations simples ne possédant qu'un seul contact, donc a priori $n_s = 1$. Cette ligne est suivie de n_s lignes commençant par *color*, lui-même suivi du label de la source et précisant ensuite la valeur de la densité volumique de courant f.

Solve 0 cette ligne déclenche la résolution en elle-même.

Print 0 la ligne suivante contient le nom de la distribution utilisé pour nommer les fichiers de sortie.

Table des noeuds Ce fichier contient les coordonnées des noeuds du maillage triés par ordre croissant et occupant chacun une ligne différente. Les coordonnées sont données pour chaque noeud dans l'ordre suivant : x y z. Ce sont en réalité les lignes comprises entre "COORDINATES" et "BOUNDARIES" du fichier *name_ dataExtrusion*.

nom du fichier "*name_ NodesTables.txt*"

Potentiels Dans ce fichier se trouve la valeur du potentiel en chacun des noeuds. Les noeuds sont triés dans le même ordre que dans le fichier *name_ NodesTables.txt* et occupent aussi une ligne chacun.

nom du fichier "*name_ potential.txt*"

3.4 Justification du choix de la méthode

Après avoir étudié les deux méthodes décrites ci-dessus, il a fallu choisir laquelle utiliser. Le choix s'est porté sur la méthode par extrusion et cette partie décrit la justification de ce choix.
Etudions les deux points principaux de comparaison entre les deux méthodes.

Configurations nerveuses possibles Les deux méthodes ont une limitation commune : elles considèrent que les nerfs ne se déforment pas longitudinalement. Cependant, la méthode par Fourier ajoute l'hypothèse que le nerf a une configuration axisymétrique par rapport à l'axe z. Cela signifie que l'erreur de la solution trouvée grâce à la méthode par Fourier pour un problème non-axisymétrique est bien plus importante que celle de la solution trouvée grâce à la méthode par extrusion. Ce point est donc un avantage pour la méthode par extrusion.

Précision Le problème principal de la méthode par Fourier réside dans la précision de sa réponse. Deux opérations distinctes sont effectuées lors de cette méthode : le calcul de la distribution des potentiels sur une section longitudinale du nerf et la décomposition spectrale de Fourier pour l'interpolation de la solution tridimensionnelle.

Pour augmenter la précision de la première étape, il faut augmenter le nombre de noeuds, ce qui fera augmenter les complexités spatiale et temporelle de la même manière que si l'on augmente le nombre de noeuds du maillage de la méthode par extrusion.

Le problème vient de l'augmentation de la précision de la décomposition spectrale de Fourier pour laquelle il faut augmenter le nombre de modes. Or, en augmentant ce nombre, on augmente également le nombre d'éléments de la matrice A (voir équation 3.2.21) de manière quadratique. La figure 3.15 représente le nombre d'éléments de la matrice A en fonction du

nombre de noeuds du maillage bidimensionnel et du nombre de modes. On peut observer qu'en appliquant une décomposition de Fourier avec $M = 6$ (voir équation 3.2.21) sur un maillage bidimensionnel constitué de 3000 noeuds (dans sa thèse, Parrini, présente un résultat en utilisant $M = 6$ et un maillage de 2295 noeuds[3]), la matrice A contient plus d'un milliard d'éléments[8]. La matrice A étant une matrice pleine, il est impossible d'uti-

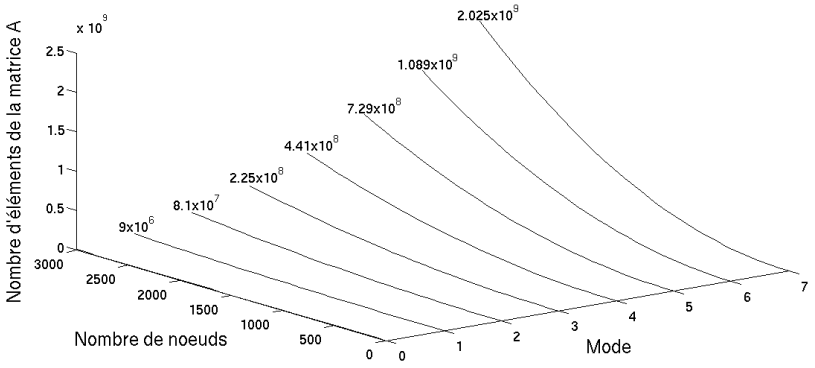


FIG. 3.15 – Graphe représentant le nombre d'éléments de la matrice A (voir équation 3.2.21) en fonction du nombre de modes utilsé pour la décomposition spectrale de Fourier et du nombre de noeuds du maillage bidimensionnel. Le nombre d'éléments n_e pour un nombre de noeuds $n_n = 3000$ est indiqué au bout de chaque ligne. Les lignes représentent n_e en fonction de n_n pour un nombre de modes M constant.

liser cette méthode telle quelle. Une approximation supplémentaire doit être faite. Pratiquement, la matrice A n'est plus totalement remplie et le calcul de la solution U_i ne prend en compte que les modes j avec $j \leq i$. La solution U_i est ensuite utilisée pour calculer U_{i+1} et l'erreur introduite par cette approximation est donc répercutée sur l'ensemble des solutions. Prenons comme exemple $M = 1$, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

Alors que le système réellement résolu est le suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

[8] A titre d'exemple, avec Matlab, sous Windows XP 32-bits, une matrice peut contenir maximum 155×10^6 éléments (http ://www.mathworks.com/support/tech-notes/1100/1110.html, consultée le 19.12.2009).

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} U_1 &= B_1/A_{11} \\ U_2 &= (B_2 - A_{21}U_1)/A_{22} \\ U_3 &= (B_3 - A_{21}U_1 - A_{22}U_2)/A_{22} \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Lorsque l'on applique rigoureusement méthode par Fourier, on se rend compte que sa complexité spatiale est en réalité très mauvaise et que l'on est obligé de rajouter une simplification pour pouvoir l'utiliser. Cette simplication, évoquée au début du chapitre 3, introduit une erreur supplémentaire et peut amener à une solution incohérente. C'est principalement cet argument qui justifie le choix de la méthode par extrusion pour la réalisation de ce projet.

Même si a priori le temps d'exécution de la méthode par Fourier est plus intéressant, celui de la méthode par extrusion reste acceptable et ne limite pas son utilisation. Donc, vu les deux arguments développés ci-dessus, le choix s'est porté sur la méthode par extrusion.

3.5 Exemple de résultat

Prenons à présent un exemple de géométrie et observons les résultats obtenus après chaque étape. Les fichiers d'entrées utilisés pour cet exemple sont donnés en annexe.

Premièrement, la géométrie, qui se compose de cinq couches (une fine constituée d'éléments quadrilatères, les quatre autres étant constituées d'éléments triangulaires), du contact et du recess, est détaillée dans le tableau 3.1.

Tab. 3.1 – Définition des dimensions de la géométrie. L'ordre des couches est donné en partant du centre vers la périphérie.

Label	type	épaisseur $[\mu m]$	longueur	conductivité $[\frac{S}{m}]$
4	fibre	2200	42000	0.1 (en x et y), 1 (en z)
7	tissu conjonctif	150	42000	0.0659
3	saline	250	42000	2
2	isolant	900	11200	10^{-6}
6	recess	290	800	2
5	contact	250	1500	10^4
1	saline	2500	42000	2

Sur la figure 3.16 se trouve le maillage bidimensionnel obtenu grâce au programme *Mesh2D*. La couche 7 n'est pas encore présente car elle est composée d'éléments quadrilatéraux ajoutés dans le programme *Extrusion*.

Sur la figure 3.5 se trouve le résultat de l'extrusion. On peut observer la différence de labels des couches qui sont plus courtes que le domaine en z (l'isolant, le contact et le recess) à différentes valeurs de z.

Et finalement, sur la figure 3.18 est représentée la distribution des potentiels obtenue au niveau de l'électrode.

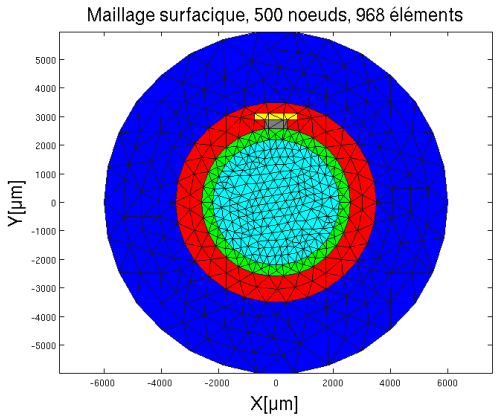


FIG. 3.16 – Sortie du programme *Mesh2D*. En partant du centre vers la périphérie : la fibre en bleu ciel, de la saline en vert, de l'isolant en rouge, le recess en gris (également de la saline), l'électrode en jaune et à nouveau de la saline en bleu foncé.

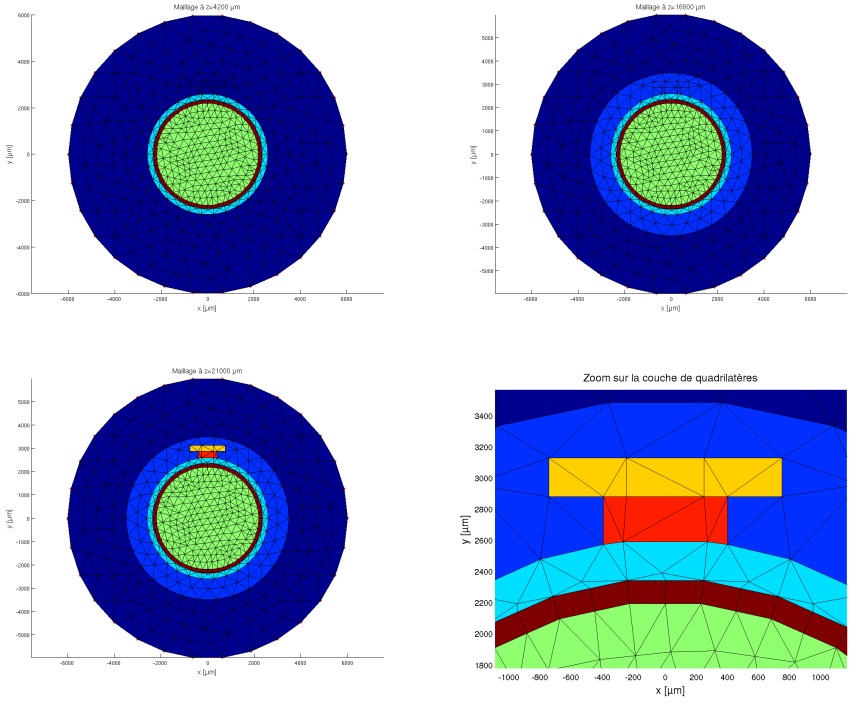


FIG. 3.17 – Trois sections du maillage tridimensionnel à différentes valeurs de z et en bas à droite un agrandissement du maillage pour $z = 21000\mu m$ (c'est-à-dire au niveau de l'électrode) sur lequel peut se voir la couche d'éléments quadrilatéraux. Sur la section pour $z = 4200\mu m$, on peut voir que les couches életrode, recess et isolant ont le même label que la saline extérieure. Sur la section $z = 16800\mu m$, un nouveau label représentant l'isolant apparaît. Finalement, sur la section $z = 21000\mu m$, l'isolant, l'électrode et le recess sont présents.

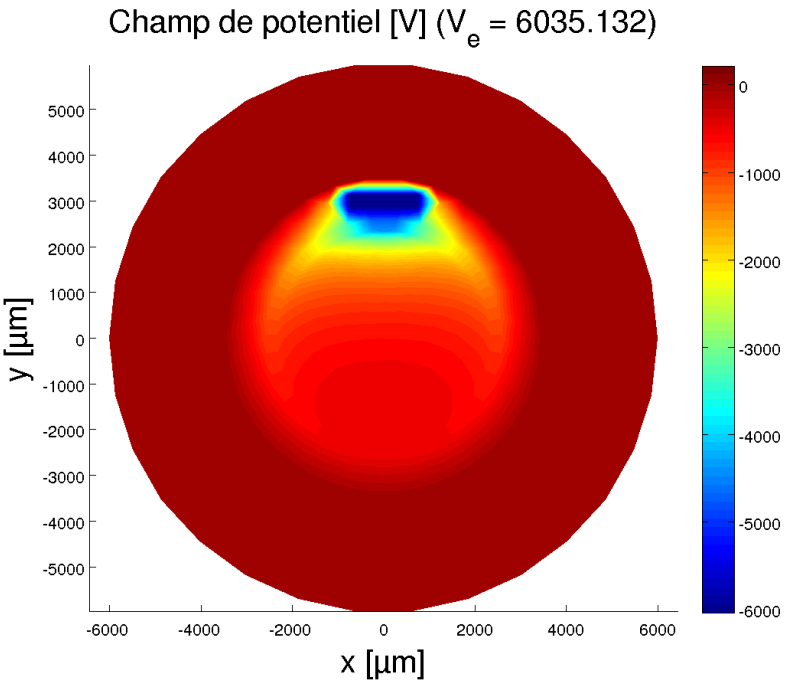


FIG. 3.18 – Distribution des potentiels pour $z = 21000\mu m$.

Chapitre 4

Design de l'interface graphique

Un des trois modules de l'outil est l'interface utilisateur (elle est dénommée GUI dans cette partie pour Graphic User Interface). Bien que ce module ne représente pas la partie la plus techniquement complexe, elle n'en est pas moins importante. Il est indispensable que l'utilisateur puisse employer l'application de manière intuitive et ne doive pas consulter le mode d'emploi à chaque utilisation. C'est aux utilisateurs potentiels de décider si la GUI leur paraît ergonomique et complète et non au développeur. Dans le cadre de ce travail, la GUI a été conçue suivant une démarche centrée utilisateur[5], [23]. Elle permet à l'utilsateur de créer le fichier décrivant la géométrie automatiquement ainsi que tous les fichiers de paramètres. Elle exécute ensuite les programmes C un par un et affiche la solution avec la possibilité de changer de coordonnée z facilement.

4.1 Démarche centrée utilisateur

La démarche centrée utilisateur est un processus de design d'une interface graphique dans lequel les besoins, les envies et les limitations de l'utilisateur final sont pris en compte à chaque étape. Cette méthode est caractérisée par une validation de l'analyse du problème du développeur par un utilisateur réel. Il est donc important de connaître a priori les attentes et les priorités de l'utilisateur mais également ses connaissances techniques, ses aptitudes informatiques, les applications habituelles,etc. Ces informations peuvent être récoltées à l'aide d'un quesitonnaire soumis à plusieurs utilisateurs potentiels ou encore grâce à des interviews. Avec cette méthode de design on essaye d'optimiser l'interface par rapport à ce que les utilisateurs connaissent, veulent ou ont besoin pour travailler plutôt que de les obliger à changer leur manière de travailler pour s'adapter à l'approche du développeur. Dans le cadre de ce travail, un utilisateur a été consulté pour réunir les informations préliminaires et valider chaque étape du design. Les quatre éléments à garder à l'esprit lors du développement d'une interface à l'aide de cette méthode sont les suivants :

La visibilité : l'utilsateur doit pouvoir en un coup d'oeil décrire ce qu'il pourra ou ne pourra pas faire avec l'outil.

L'accessibilité : l'utilisateur doit pouvoir trouver de manière aisée et rapide l'information qu'il recherche.

La lisibilité : l'utilisateur doit pouvoir lire le texte facilement. La lisibilité peut être augmentée, par exemple, grâce à un bon choix de contraste entre le texte et le fond ou grâce à l'utilisation de l'écriture italique ou grasse.

Le langage : en fonction du contexte différents langages peuvent être nécessaires. Ils peuvent aller du simple texte à une voix en passant par des bulles à texte.

Le design a débuté par une rencontre avec l'utilisateur. Les outils déjà utilisés par celui-ci ont été présentés. Les informations mentionnées ci-dessus ont été récoltées.

Ensuite trois types différents de GUI ont été réalisés dans le but de déterminer les avantages et les inconvénients de chacun. La figure 4.1 montre les trois GUI.

La première a comme caractéristique principale de fonctionner exclusivement avec des fenêtres de type "pop-up". A chaque action de l'utilisateur une nouvelle fenêtre s'ouvre pour communiquer avec l'utilisateur et le résutlat de cette communication est affiché dans la fenêtre principale.

La deuxième fonctionne avec des onglets. Chaque onglet représente une stimulation et un onglet sert à comparer les résultat obtenus.

Et enfin, la troisième rassemble les informations de plusieurs stimulations dans la fenêtre principale.

Ces trois interfaces ont été présentées à l'utilisateur. Voici les conclusions de cette rencontre :

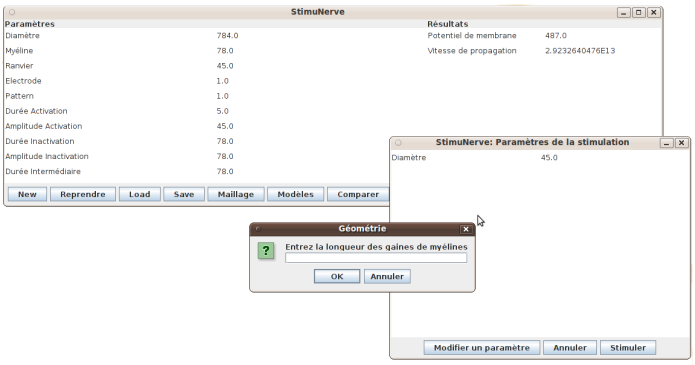
- Dans une fenêtre ne doit se trouver qu'une seule stimulation. La solution est donnée sous forme de graphe et plusieurs solutions présentées dans une même fenêtre réduiraient la lisibilité de celles-ci.
- Plusieurs stimulations doivent pouvoir être accessibles dans plusieurs fenêtres différentes de manière à pouvoir les comparer facilement. Il doit être possible d'ouvrir une nouvelle fenêtre de stimulation à partir de n'importe quelle autre fenêtre déjà existante.
- Les onglets doivent être utilisés pour classer les différents types de paramètres d'une même stimulation.
- Les fenêtres "pop-up" ne doivent être utilisées qu'en cas d'intervention obligatoire de l'utilisateur. Par exemple, si le programme a besoin d'un certain paramètre pour continuer.

En considérant ces conclusions et avec une bonne compréhension du fonctionnement des programmes C, l'interface graphique présentée sur la figure 4.2 a été conçue.

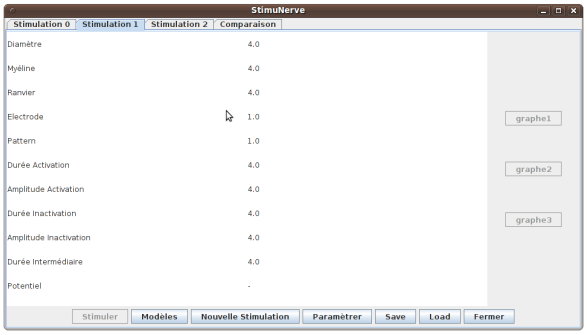
Elle permet de réaliser de manière intuitive les différentes étapes décrites précédemment sans nécessairement avoir besoin de comprendre le fonctionnement de la résolution du problème en lui-même. Grâce à la GUI, l'utilisateur passe directement de la géométrie qu'il crée (figure 4.3) à l'affichage de la distribution des potentiels dans le volume décrit (figure 4.4).

Cette interface graphique a été validée par une dernière entrevue avec l'utilisateur.

GUI 1



GUI 2



GUI 3

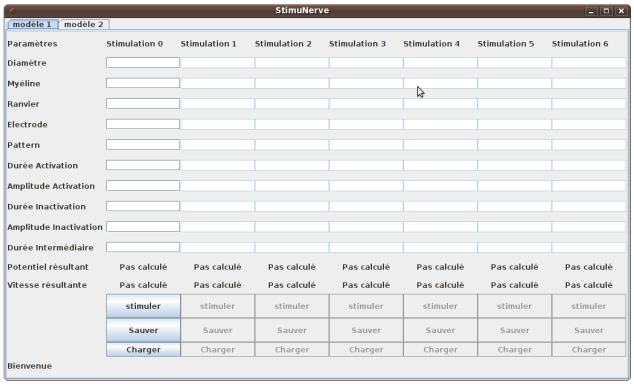


FIG. 4.1 – Captures d'écrans des trois premières interfaces graphiques.

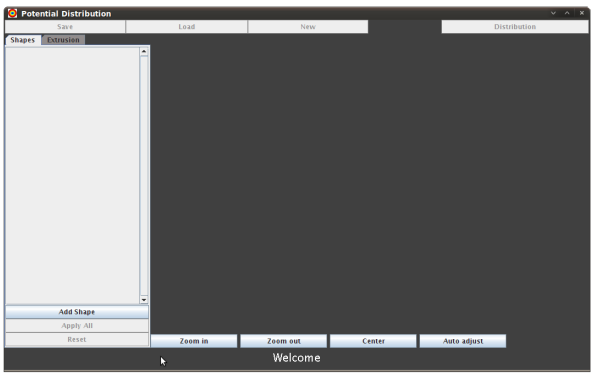


FIG. 4.2 – Interface graphique finale.

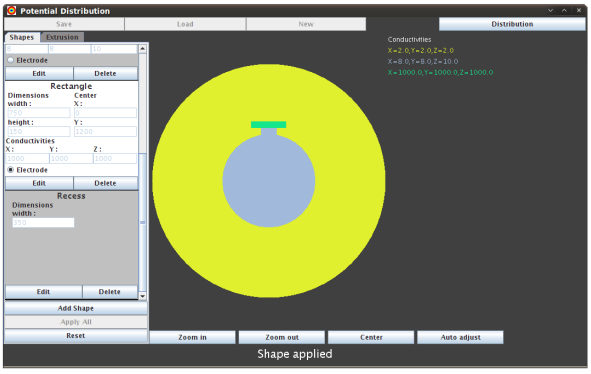


FIG. 4.3 – Interface graphique finale avec une géométrie affichée.

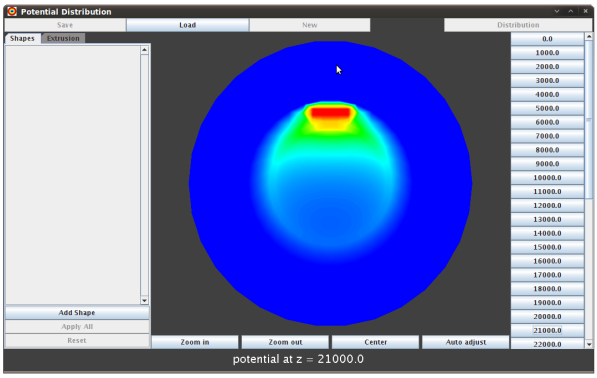


FIG. 4.4 – Interface graphique finale avec la distribution des potentiels pour $z = 21000\mu m$. Sur la droite de la figure, une liste de boutons reprenant les différentes coordonnées z disponibles permet de naviguer dans la solution tridimensionnelle. Des captures d'écrans pour d'autres valeurs de z sont disponibles en annexe et permettent d'observer la propagation longitudinale des potentiels dans la fibre.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons développé une interface graphique permettant à des utilisateurs ne possèdant aucune connaissance particulière en méthode numérique ni en langage de programmation, d'utiliser un programme de calcul de distribution de potentiels lors d'une stimulation électrique d'un nerf. Cet outil a été réalisé de manière à pouvoir être amélioré et complété facilement.

Ce travail s'inspire principalement de la partie de calcul de distribution des potentiels lors d'une stimulation électrique nerveuse des travaux de Parrini S.[3], de Potter d'Indoye A.[6] et de Oozeer M.[4]. La méthode par extrusion décrite par de Potter d'Indoye et Oozeer est utilisée dans l'outil développé car elle peut être appliquée à un plus grand nombre de géométries que la méthode par Fourier décrite par Parrini. De plus, des simplifications dans l'implémentation de cette dernière sont nécessaires et entraînent une perte de précision pouvant amener à des solutions incohérentes. Les théories de ces deux méthodes sont rassemblées dans ce texte pour donner une vue d'ensemble des informations consultées.

Une interface graphique intuitive a été développée. Elle génère automatiquement le fichier de description de la géométrie et les fichiers de paramètres nécessaires aux programmes C implémentant la méthode par extrusion. Après avoir exécuté les trois modules (maillage bidimensionnel, extrusion et résolution de l'équation de Poisson), elle affiche une représentation graphique de la solution obtenue avec la possibilité de naviguer facilement parmi les différentes sections transversales du nerf.

L'utilisation de cet outil ne requiert aucune connaissance sur la méthode des éléments finis (utilisée pour calculer la distribution) ni sur un langage de programmation quel qu'il soit. Un mode d'emploi est bien sûr nécessaire mais l'interface graphique est simple et intuitive.

Les entrées et les sorties des différents modules de l'implémentation de la méthode choisie sont définies avec précision. Cela permet de pouvoir modifier une partie du calcul de distribution, ou son ensemble, sans devoir apporter de modifications majeures à l'interface graphique. L'outil est donc modulable.

L'interface graphique étant développée en Java et l'implémentation du calcul de distribution étant faite en C, l'outil est portable sur les systèmes d'exploita-

tion permettant d'accueillir une machine virtuelle Java (Windows, Solaris, Linus et OS X).

Une amélioration évidente de cet outil serait qu'il puisse modéliser la réponse d'un nerf suite à une impulsion électrique. Cette dernière utiliserait le calcul de distribution des potentiels déjà disponible. L'ajout de cette nouvelle fonction à l'interface graphique peut se faire facilement en ajoutant un onglet au "panel" de gauche qui reprend les différents paramètres (pour l'instant, une description de la géométrie et les paramètres de l'extrusion).

La méthode de calcul de distribution utilisée impose la contrainte que le nerf ne se déforme pas longitudinalement. Il pourrait être intéressant de pouvoir donner le choix à l'utilisateur entre plusieurs méthodes de calcul de distribution. Prenons comme exemple la méthode par extrusion et une méthode utilisant un maillage tridimensionnel entièrement décrit par l'utilisateur. La première est plus contraignante mais plus rapide à l'exécution et plus facile d'utilisation que la seconde.

Finalement, la navigation dans la solution (que ce soit la distribution des potentiels ou la réponse du nerf) pourrait être amélioré en proposant une représentation tridimensionnelle du volume considéré.

Bibliographie

[1] Z. Lertmanorat and D.M. Durand. Extracellular voltage profile for reversing the recruitment order of peripheral nerve stimulation : a simulation study. *Journal of Neural Engineering*, 1 :202–211, 2004.

[2] K.E.I. Deurloo, J. Holsheimer, and H.B.K. Boom. Transverse tripolar stimulation of peripheral nerve : a modelling study of spatial selectivity. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 36(1) :66–74, 1998.

[3] S. Parrini. *Mathematical modelling and numerical simulation of artificial nerve fibres activation.* PhD thesis, Université catholique de Louvain, 1996.

[4] M. Oozeer. *Modelling the electrical stimulation of the optic nerve.* PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2006.

[5] C. Abras, D. Maloney-Krichmar, and J. Preece. User-centered design. 2004.

[6] A.de Potter d'Indoye. Modélisation de la stimulation électrique artificielle des nerfs périphériques. Master's thesis, UcL, 2002-2003.

[7] D. Purves, G.J. Augustine, D. Fitzpatrick, W. C. Hall, A.-S. LaMantia, and J. O McNamara. *Neurosciences.* Sinauer Associates, Inc., 2005.

[8] AL Hodgkin and B. Katz. The effect of sodium ions on the electrical activity of the giant axon of the squid. *The Journal of physiology*, 108(1) :37, 1949.

[9] K.S. Cole. *Membranes, ions, and impulses : a chapter of classical biophysics.* Univ of California Pr, 1968.

[10] AL Hodgkin and AF Huxley. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of Loligo. *The Journal of physiology*, 116(4) :449, 1952.

[11] AL Hodgkin and AF Huxley. The components of membrane conductance in the giant axon of Loligo. *The Journal of physiology*, 116(4) :473, 1952.

[12] J.W. Moore, M.P. Blaustein, N.C. Anderson, and T. Narahashi. Basis of tetrodotoxin's selectivity in blockage of squid axons. *Journal of General Physiology*, 50(5) :1401, 1967.

[13] Alojz R. Kralj and Tadej Bajd. *Functional electrical stimulation : standing and walking after spinal cord injury.* CRC Press, Inc., 1989.

[14] J. Delbeke C. Veraart, M.-C. Wanet-Defalque, A. Vanlierde, G. Michaux, S. Parrini, M. Verleysen O. Glineur, C. Trullemans, and J. Mortimer. Selective stimulation of human optic nerve. *Proc. of the Int.FES Soc*, 4th Ann. Conf. :57–59, 1999.

[15] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol. (Lond.)*, 116 :500–544, 1952.

[16] WT Liberson, HJ Holmquest, D. Scot, and M. Dow. Functional electrotherapy : stimulation of the peroneal nerve synchronized with the swing phase of the gait of hemiplegic patients. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, 42 :101, 1961.

[17] V.Legat. Introduction aux éléments finis - notes du cours meca2120, 2004.

[18] S. Haykin and B. Van Veen. *Signals and Systems*. John Wiley & Sons, Inc, 2003.

[19] L.E.E.D.T.G. Delaunay. Triangulation for Plannar Graphs. *Discrete and Computational Geometry*, 44 :1–29, 1988.

[20] DF Watson. Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *The computer journal*, 24(2) :167, 1981.

[21] P. J. Frey and H. Borouchaki. Surface mesh evaluation. In *6th International Meshing Roundtable*, pages 363–373, 1997.

[22] A. Andrien. Modélisation de la stimulation du nerf optique par électrode posée sur la paupière. Master's thesis, UcL, 1999.

[23] K. Vredenburg, J.Y. Mao, P.W. Smith, and T. Carey. A survey of user-centered design practice. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems : Changing our world, changing ourselves*, pages 471–478. ACM New York, NY, USA, 2002.

Annexe A

Mode d'emploi

Après avoir exécuté le fichier java, l'écran représenté sur la figure A.1 apparaît. Sur la gauche se trouve le panneau reprenant les différents paramètres. Ces derniers concernent la géométrie, définie dans l'onglet "Shapes", et l'extrusion, définie dans l'onglet "Extrusion". La première étape consiste à ajouter les différents objets de la géométrie grâce au bouton "Add shape".

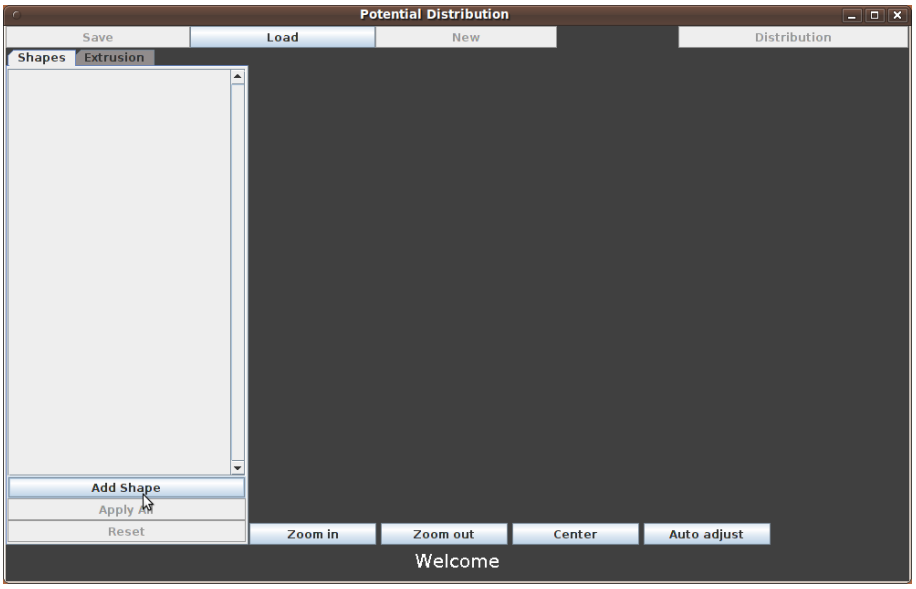


FIG. A.1 – Au lancement du programme, cet écran apparaît. La première opération consiste à ajouter des objets en cliquant sur le bouton "Add shape".

Une boîte de dialogue s'ouvre (voir figure A.2) servant à choisir entre un cercle (représentant une couche du nerf) et un rectangle (représentant une électrode).

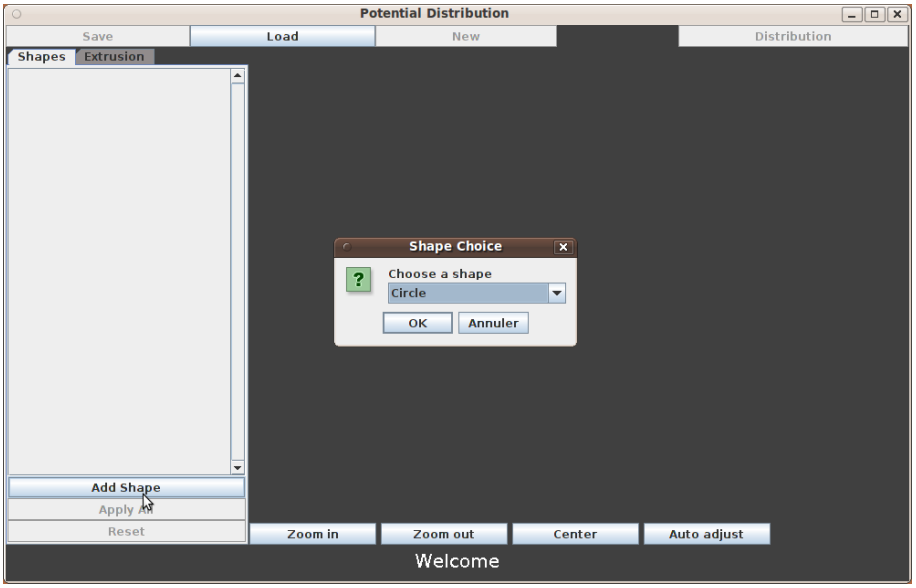


FIG. A.2 – Lorsque l'on pousse sur le bouton "Add shape", une boîte de dialogue servant à sélectionner le type d'objet à ajouter s'ouvre.

Après avoir validé le choix d'un cercle, une boîte "Circle" s'ajoute dans l'onglet "Shapes" (voir figure A.3). Pour pouvoir appliquer l'objet, tous les champs doivent être remplis avec un nombre, sauf le champ "length" et la coordonnée en z du centre qui peuvent soit être remplis avec un nombre, soit être laissés vides, soit être remplis avec le mot "default". Précisons également que qu'il est préférable pour la visualisation que les dimensions soient exprimées en μm. Trois types de paramètres sont à spécifier :

1. Les dimensions :

   radius : le rayon du cercle.

   length : la longueur de la couche. Si ce champ est laissé blanc ou rempli avec le mot "default", la couche aura une longueur égale à la longueur totale du domaine.

2. Les coordonnées du centre (rappelons que l'axe z représente la direction longitudinale). Si la coordonnée en z n'est pas spécifiée, elle prend une valeur égale à la moitié de la longueur totale du domaine.

3. Les conductivités dans les trois directions.

Après avoir spécifié correctement les différents paramètres, il faut pousser sur le bouton "Apply" pour appliquer l'objet. Ce dernier apparaît alors sur la prévisualisation de la géométrie et il faut ensuite pousser sur le bouton "Edit" pour pouvoir en modifier les paramètres (voir figure A.4).

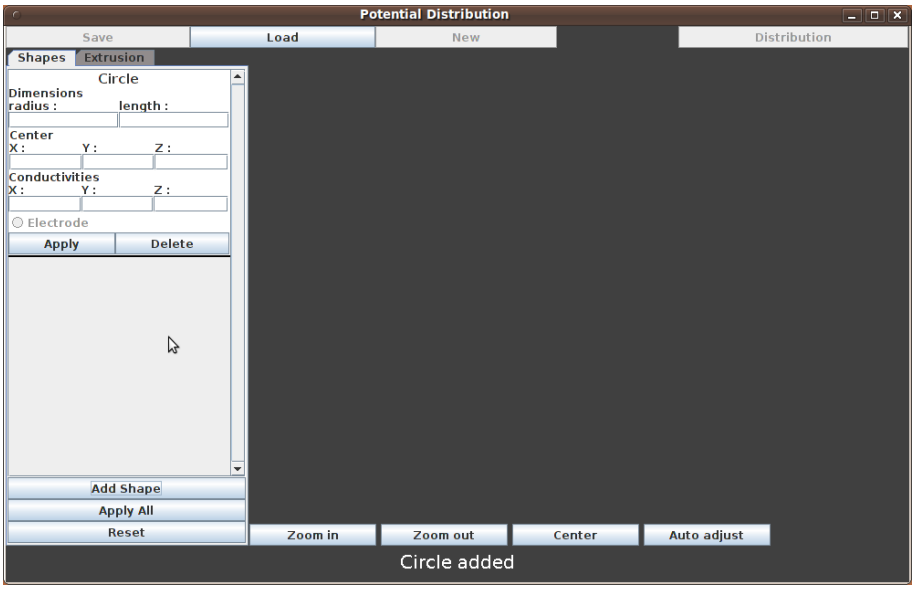


FIG. A.3 – Lorsqu'un cercle est ajouté, une boîte de paramètres s'ajoute dans l'onglet "Shapes".

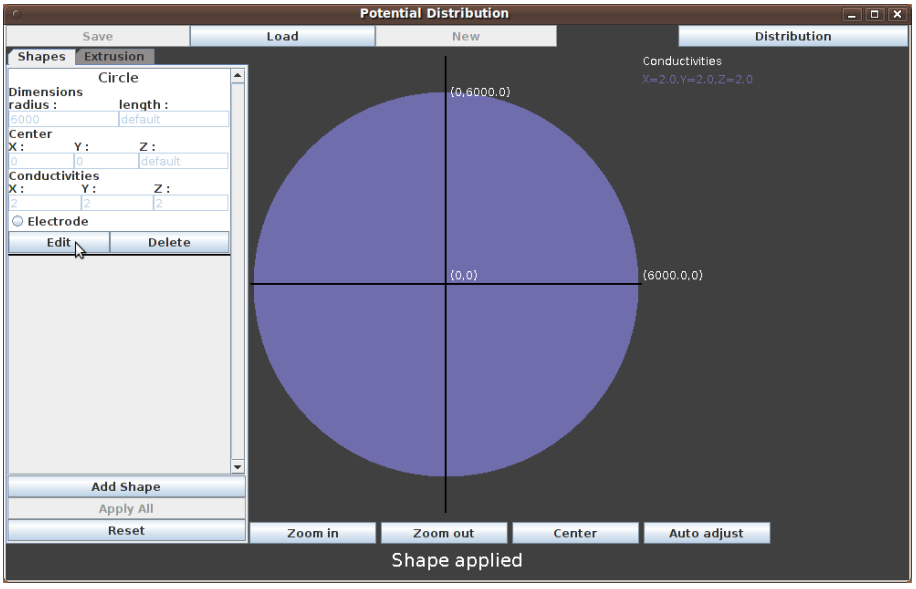


FIG. A.4 – Les objets appliqués apparaissent sur la prévisualisation de la géométrie. Ils peuvent ensuite être modifiés grâce au bouton "Edit" ou supprimés grâce au bouton "Delete".

Un rectangle peut être ajouté de la même manière qu'un cercle, en poussant sur "Add shape" et ensuite en sélectionnant "Rectangle". Les paramètres

concernant le centre et la conductivité sont les mêmes que pour un cercle, ceux concernant les dimensions sont quant à eux différents (voir figure A.5) :

width : la largeur du rectangle (sa dimension selon l'axe x).

height : la hauteur du rectangle (sa dimension selon l'axe y).

length : idem que pour le cercle.

Chaque boîte représentant un objet comporte un bouton "Electrode" qui n'est disponible que si l'objet a déjà été appliqué. Il faut sélectionner l'objet représentant le contact en cochant ce bouton avant de pouvoir lancer le calcul de distribution.

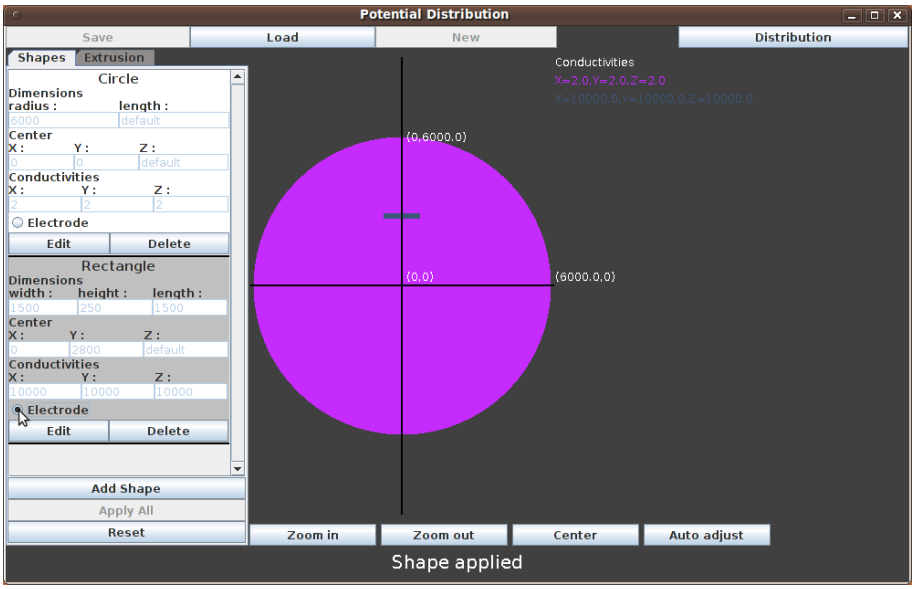


FIG. A.5 – Un rectangle peut être ajouté et défini de la même manière qu'un cercle. S'il représente le contact, il faut cocher le bouton "Electrode".

Une fois que le contact a été appliqué ainsi qu'un cercle de rayon inférieur à la position du contact, il est possible d'ajouter un objet de type "Recess" toujours grâce au bouton "Add shape" (voir figure A.6). Il faut uniquement spécifier sa largeur et sa longueur pour pouvoir l'appliquer. En effet, sa position est relative à celle du contact, sa hauteur est définie par l'espace présent entre le contact et le cercle précédemment cité et sa conductivité est la même que celle de la couche inférieure.

Il n'est pas obligatoire de spécifier les paramètres concernant l'extrusion. Par défaut, la section représentée sera reproduite dix fois tout les $100\mu m$. Le bouton "apply" (voir figure A.7) sert à modifier le nombre de reproductions de la section par le nombre présent dans le champ "number of layers". Les espacements entre les sections seront quant à eux appliqués lors du calcul de la distribution.

Une fois que la géométrie est complète, il suffit de pousser sur le bouton "Distribution" pour lancer le calcul de distribution des potentiels (voir figure A.8).

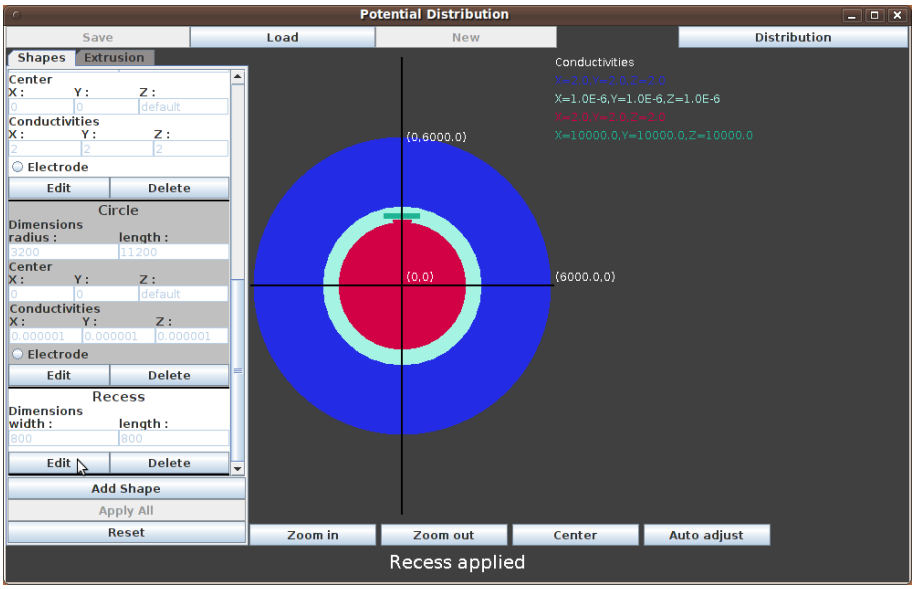


FIG. A.6 – Ajout d'un objet de type Recess.

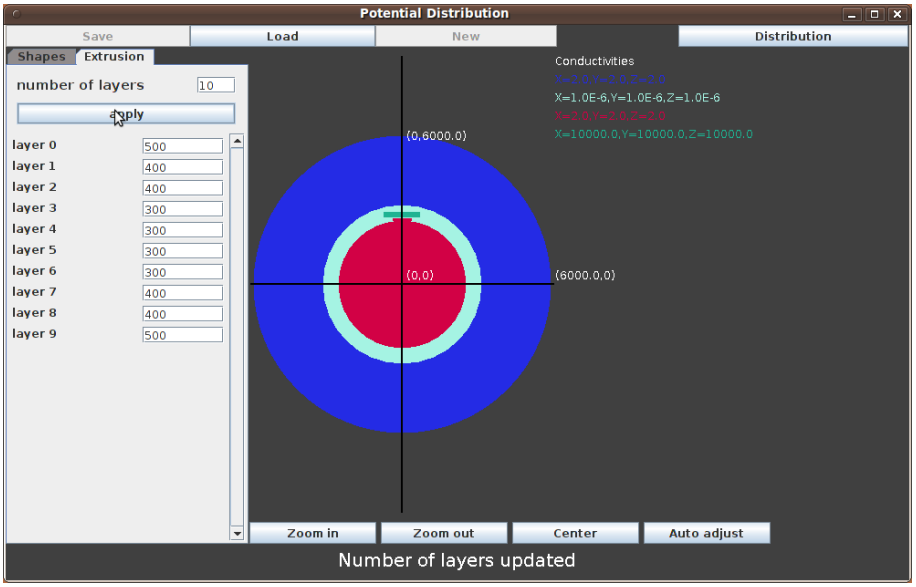


FIG. A.7 – L'onglet extrusion permet de spécifier le nombre de reproductions de la section initiale et les espacements entre chacune des reproductions.

Quand le calcul est terminé, la distribution des potentiels de la section centrale est affichée (voir figure A.9). Sur la droite se trouve une liste de boutons permettant d'afficher la solution aux différentes sections spécifiées dans l'onglet extrusion (voir figure A.10).

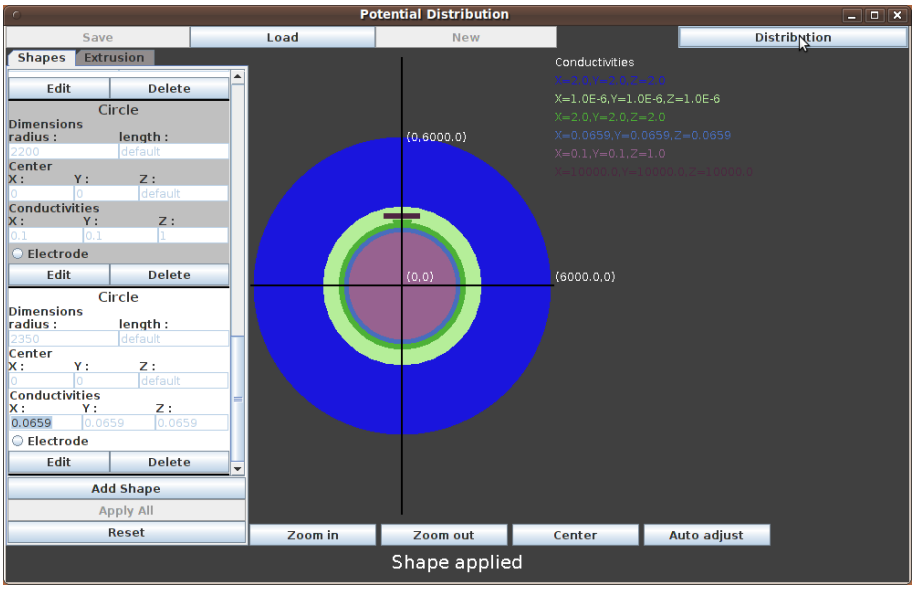


FIG. A.8 – Lancement du calcul de distribution des potentiels.

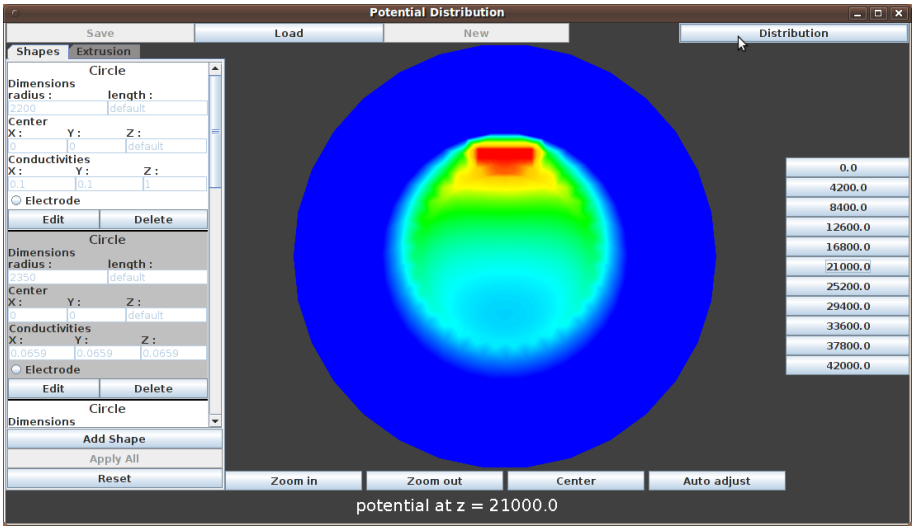


FIG. A.9 – Affichage du résultat sur la section centrale.

Enfin, il sera possible de sauvegarder une solution, de charger une solution précédemment calculée ou encore d'ouvrir une nouvelle fenêtre pour calculer une nouvelle distribution sans pour autant effacer la précédente mais ces trois fonctions ne sont pas encore implémentées.

Le bouton "Reset" se trouvant en bas de l'onglet "Shapes" permet d'effacer tous les objets pour recréer une nouvelle géométrie.

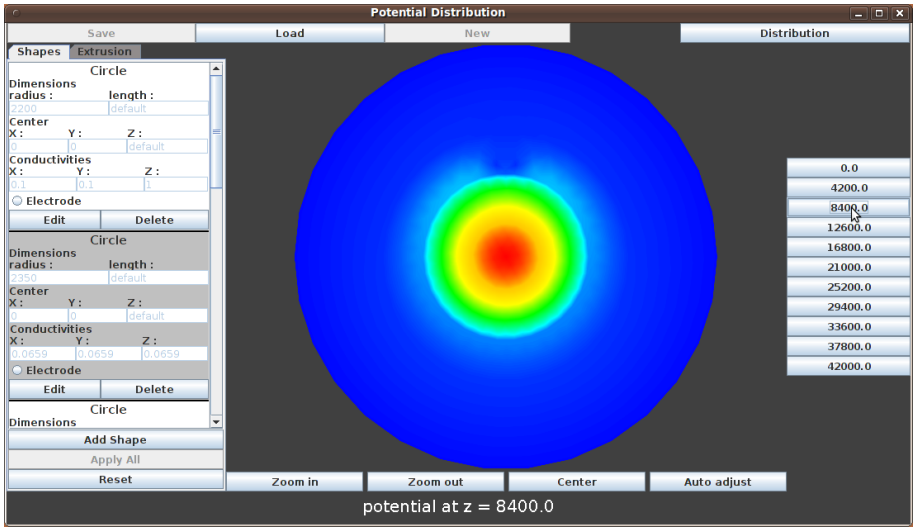


FIG. A.10 – La liste de boutons sur la droite permet de pouvoir visualiser la solution pour différentes valeurs de z.

Annexe B

Fichier d'entrées de l'exemple de résultat donné à la section 3.5

B.1 default_geom

```
loop 0
-6000.0 -7.347880794884119E-13
-5868.885604402834 1247.4701449065544
-5481.272745855605 2440.419858454801
-4854.101966249684 3526.711513754838
-4014.7836381531492 4458.8689528643645
-3000.0000000000014 5196.152422706631
-1854.101966249684 5706.339097770921
-627.1707796059213 5967.13137220964
627.1707796059208 5967.13137220964
1854.1019662496847 5706.339097770922
2999.9999999999995 5196.152422706634
4014.783638153148 4458.868952864367
4854.101966249685 3526.7115137548403
5481.2727458556055 2440.4198584548058
5868.885604402833 1247.4701449065592
6000.0 1.4695761589768238E-12
5868.885604402834 -1247.470144906551
5481.2727458556055 -2440.419858454798
4854.101966249685 -3526.7115137548376
4014.78363815315 -4458.868952864362
3000.000000000002 -5196.15242270663
1854.1019662496847 -5706.339097770921
627.1707796059247 -5967.13137220964
-627.1707796059187 -5967.13137220964
-1854.101966249684 -5706.339097770922
-2999.999999999997 -5196.152422706635
```

```
-4014.7836381531474 -4458.868952864372
-4854.101966249684 -3526.7115137548403
-5481.272745855604 -2440.419858454806
-5868.885604402833 -1247.470144906565
end

loop 1
-3500.0 -4.286263797015736E-13
-3423.5166025683197 727.6909178621568
-3197.409101749103 1423.5782507653007
-2831.559480312316 2057.2483830236556
-2341.957122256004 2601.0068891708793
-1750.0000000000007 3031.0889132455345
-1081.5594803123156 3328.6978070330374
-365.84962143678746 3480.8266337889563
365.8496214367871 3480.8266337889568
1081.559480312316 3328.697807033038
1749.9999999999995 3031.088913245537
2341.957122256003 2601.006889170881
2831.5594803123163 2057.248383023657
3197.4091017491032 1423.5782507653032
3423.5166025683197 727.6909178621595
3500.0 8.572527594031472E-13
3423.5166025683197 -727.6909178621548
3197.4091017491032 -1423.578250765299
2831.5594803123163 -2057.248383023655
2341.9571222560044 -2601.006889170878
1750.0000000000011 -3031.0889132455345
1081.559480312316 -3328.6978070330374
365.84962143678945 -3480.8266337889563
-365.84962143678587 -3480.8266337889568
-1081.5594803123156 -3328.697807033038
-1749.999999999998 -3031.0889132455372
-2341.9571222560025 -2601.0068891708834
-2831.559480312316 -2057.248383023657
-3197.4091017491023 -1423.5782507653037
-3423.5166025683197 -727.6909178621629
end

loop 2
-2600.0 -3.1840816777831184E-13
-2543.1837619078947 540.5703961261736
-2375.2181898707618 1057.5152719970806
-2103.444185374863 1528.2416559604299
-1739.7395765330314 1932.1765462412245
-1300.0000000000007 2251.66604983954
-803.4441853748631 2472.7469423673992
-400.0 2569.0465157330254
-271.77400449589925 2585.7569279575105
271.77400449589896 2585.756927957511
```

```
400.0 2569.0465157330254
803.4441853748634 2472.7469423673992
1299.9999999999998 2251.6660498395413
1739.739576533031 1932.1765462412259
2103.4441853748635 1528.2416559604308
2375.218189870762 1057.5152719970824
2543.1837619078947 540.5703961261756
2600.0 6.368163355566237E-13
2543.1837619078947 -540.5703961261721
2375.2181898707627 -1057.5152719970793
2103.4441853748635 -1528.2416559604296
1739.7395765330316 -1932.1765462412236
1300.000000000001 -2251.66604983954
803.4441853748634 -2472.7469423673992
271.7740044959007 -2585.7569279575105
-271.7740044958981 -2585.756927957511
-803.4441853748631 -2472.7469423673992
-1299.9999999999986 -2251.6660498395418
-1739.7395765330305 -1932.1765462412277
-2103.444185374863 -1528.2416559604308
-2375.2181898707618 -1057.5152719970827
-2543.1837619078947 -540.5703961261781
end

loop 3
-2200.0 -2.6942229581241773E-13
-2151.9247216143726 457.40571979906997
-2009.8000068137217 894.8206147667605
-1779.837387624884 1293.1275550434407
-1472.0873339894881 1634.9186160502668
-1100.0000000000005 1905.2558883257648
-679.8373876248842 2092.324335849338
-229.9626191888378 2187.9481698102013
229.9626191888376 2187.9481698102013
679.8373876248844 2092.3243358493382
1099.9999999999998 1905.255888325766
1472.0873339894877 1634.9186160502682
1779.8373876248843 1293.1275550434414
2009.800006813722 894.820614766762
2151.924721614372 457.40571979907173
2200.0 5.388445916248355E-13
2151.9247216143726 -457.4057197990687
2009.8000068137221 -894.8206147667594
1779.8373876248843 -1293.1275550434405
1472.0873339894883 -1634.918616050266
1100.0000000000007 -1905.2558883257643
679.8373876248844 -2092.324335849338
229.96261918883908 -2187.9481698102013
-229.96261918883684 -2187.9481698102013
-679.8373876248842 -2092.3243358493382
```

```
-1099.9999999999989 -1905.2558883257661
-1472.0873339894874 -1634.9186160502695
-1779.837387624884 -1293.1275550434414
-2009.8000068137214 -894.8206147667623
-2151.924721614372 -457.40571979907384
end

loop 4
-750.0 3125.0
-250.0 3125.0
250.0 3125.0
750.0 3125.0
750.0 2875.0
400.0 2875.0
250.0 2875.0
-250.0 2875.0
-400.0 2875.0
-750.0 2875.0
end

loop 5
-400.0 2875.0
-250.0 2875.0
250.0 2875.0
400.0 2875.0
400.0 2569.0465157330254
271.77400449589896 2585.756927957511
-271.77400449589925 2585.7569279575105
-400.0 2569.0465157330254
end
```

B.2 inputMesh2D.txt

```
Electrode type: default

Geometry: default_geom

Number of nodes: 500

Number of objects: 6

Quality: 0 50.0

color for object 1: 1

color for object 2: 2

color for object 3: 3
```

```
color for object 4: 4

color for object 5: 5

color for object 6: 6
```

B.3 inputExtrusion.txt

```
Data 0
default_dataMesh
Thicken 1
Thickness: 150
Layer in : 4
Layers out 1 : 3
New label : 7
Extrusion 0
Number of sections : 42
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
```

```
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
1000
Number of short layers : 3
2 3
15400 1 26600 2 42000 1
5 5
15400 1 20250 2 21750 5 26600 2 42000 1
6 5
15400 1 20600 2 21400 6 26600 2 42000 1
Output 0
default
```

B.4 inputFEM.txt

```
Data 0
default
Conductivities 7
color 1 2.0 2.0 2.0
color 2 1.0E-6 1.0E-6 1.0E-6
color 3 2.0 2.0 2.0
color 4 0.1 0.1 1.0
color 5 10000 10000 10000
color 6 2.0 2.0 2.0
color 7 0.0659 0.0659 0.0659
Dirichlet 3
boundary 1 : 0
boundary 2 : 0
boundary 3 : 0
Stimulation 1
color 5 : 2.0e+010
Solve 0
Print 0
default
```

Annexe C

GUI avec solution

Sur la figure C.1, la propagation longitudinale des potentiels le long de la fibre peut être observée.

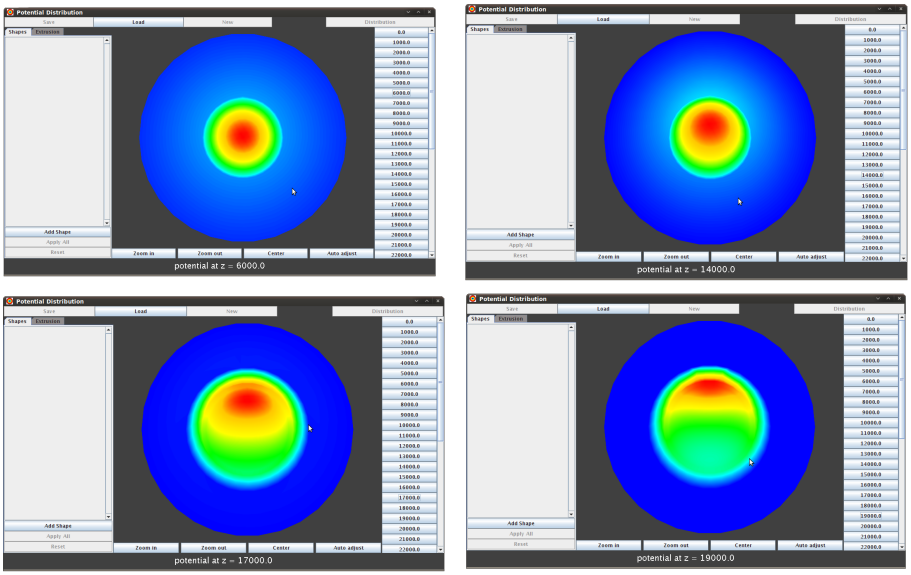


FIG. C.1 – Sur cette figure se trouvent quatre captures d'écrans de la GUI affichant la solution de l'exemple de la section 3.5 pour différentes valeurs de z.